SÉRIE A

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

LÉON REBUFFÉ

AGRÉGÉ DES SCIENCES PHYSIQUES
PROFESSEUR AU LYCÉE DE RENNES

1re THÈSE

ÉTUDE DU CHOC D'UN MOBILE TRÈS DUR, A BOUT SPHÉRIQUE, SUR UNE PLAQUE ÉPAISSE DE MÉTAL MOU
RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE DU CONTACT PAR CHOC

2e THÈSE

CINÉTIQUE CHIMIQUE

Soutenues le 9 Janvier 1947, devant la Commission d'Examen

Jury — MM. R. TREHIN, *Président.* — R. FREYMANN, M. SCHMITT, *Examinateurs.*

1947.

ÉTUDE DU CHOC D'UN MOBILE TRÈS DUR A BOUT SPHÉRIQUE SUR UNE PLAQUE ÉPAISSE DE MÉTAL MOU

RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE DU CONTACT PAR CHOC

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547311_0034

SÉRIE A

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

LÉON REBUFFÉ

AGRÉGÉ DES SCIENCES PHYSIQUES
PROFESSEUR AU LYCÉE DE RENNES

1re THÈSE

ÉTUDE DU CHOC D'UN MOBILE TRÈS DUR, A BOUT SPHÉRIQUE, SUR UNE PLAQUE ÉPAISSE DE MÉTAL MOU
RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE DU CONTACT PAR CHOC

2e THÈSE

CINÉTIQUE CHIMIQUE

Soutenues le 9 Janvier 1947, devant la Commission d'Examen

Jury — MM. R. TREHIN, *Président.* — R. FREYMANN, M. SCHMITT, *Examinateurs.*

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES

Doyen honoraire ..... M. BOUZAT
Doyen ..... M. MILON

Professeurs honoraires ..... MM. BORDAS, LE ROUX, TISON, BOUZAT, CONDUCHE

PROFESSEURS

ANTOINE	Mathématiques.	MILON	Géologie.
VASILESCO	Mathématiques.	HAGENE	Botanique.
TREHIN	Physique.	LENOIR	Botanique.
SALMON-LEGAGNEUR	Chimie.	POISSON	Zoologie.

MAITRES DE CONFÉRENCES

Mlle CHARPENTIER	Mathématiques.	VENE	Chimie.
FREYMANN	Physique.	LE CALVEZ	Botanique.
SCHMITT	Chimie.		

Secrétaire ..... SYLVAIN.

A Monsieur P. LE ROLLAND,

Ancien Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes,
Directeur de l'Enseignement Technique

Hommage d'amitié et de profonde gratitude.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

SOMMAIRE 1

PREMIERE PARTIE

LES MÉTHODES STATIQUES ET DYNAMIQUES DE DÉTERMINATION DE LA DURETÉ 3

I. — Essais statiques 3

A. — A la bille 3

B. — Essais à la pyramide ou au cône de diamant 6

II. — Essais dynamiques 6

A. — Essai à la rayure 6

B. — Essai Le Rolland 6

C. — Essais au choc 7

DEUXIEME PARTIE

APPAREILS UTILISÉS DANS NOS RECHERCHES 13

Mobiles employés 13

Plaques essayées 14

Support et encastrement des plaques 14

Partie électrique 15

TROISIEME PARTIE

COMPARAISON DE DIVERSES MÉTHODES DE MESURE D'UN TEMPS DE CONTACT PAR CHOC ET VÉRIFICATION D'UNE HYPOTHÈSE SUR LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE DU CONTACT 17

Première méthode 17

Deuxième méthode 22

Troisième méthode 23

Quatrième méthode 29

Conclusion 30

QUATRIEME PARTIE

ETUDE DES MÉTAUX MOUS 33

I. — Mesure des vitesses de rebondissement et résultats 33

II. — Procédés de mesure d'autres grandeurs qui seront utilisées pour appliquer la théorie 35

Pages

III. — Théorie du choc violent d'un mobile très dur à bout sphérique sur une plaque épaisse de métal mou 35
Etude pour un métal mou, de la limite de τ_1 36
Etude de la limite du temps τ_2 37

IV. — Application de la théorie à la connaissance de p_0 43

V. — Justification *a posteriori* des hypothèses qui ont servi de base à la théorie.. 47

VI. — Conclusion 48

ANNEXE

Tableaux de résultats et graphiques 49

I. — Métal très dur 50

II. — Métaux mous 53
Etain 53
Plomb I 56
Cuivre recuit 58
Plomb II 61

III. — Complément relatif à tous métaux (des métaux mous aux très durs) et faisant suite à la page 31 63

IV. — Contribution à une théorie des chocs de violence moyenne sur plaques épaisses de métaux mous 66

Bibliographie 70

SOMMAIRE

Diverses méthodes ont été adoptées pour le contrôle et l'identification des métaux par leur dureté. Chacune, qu'elle soit statique ou dynamique, mesure une grandeur particulière et les divers auteurs reconnaissent que la dureté n'est pas une grandeur définie au point de vue physique. Le rappel de ces méthodes donne lieu à des remarques que nous utiliserons dans la théorie du choc violent d'un corps très dur sur un métal mou, théorie qui conduit à un nouveau coefficient de dureté convenant spécialement aux métaux mous.

Notre dispositif de mesure comporte un montage électrique permettant de bien connaître le temps d'un contact par choc. La comparaison expérimentale que nous avons faite avec d'autres montages nous permet de résoudre la question controversée de l'existence d'une résistance électrique importante du contact par choc : nous concluons que cette résistance est pratiquement nulle au moins pendant une très grande part du temps de contact.

Notre méthode de mesure des temps de contact a été éprouvée à l'aide de chocs sur plaque épaisse de métal identique à celui de mobiles de masses M et de rayons de courbure R très divers. Les temps trouvés pour ces chocs, qui sont aussi près que possible des chocs purement élastiques, vérifient la formule que Hertz a établie pour les chocs où l'élasticité intervient seule. Aussi avons-nous jugé la méthode excellente pour l'étude de tous métaux et en particulier des métaux mous.

L'étude du choc sur métaux mous en plaques épaisses a de plus nécessité l'observation du rebondissement. Nous avons trouvé que, pour ces métaux, le rapport de la vitesse de rebondissement à celle d'arrivée, soit $\varepsilon = v' : v$ tend vers une limite ε_0 non nulle lorsque v croît.

Nous avons eu également à mesurer les diamètres d'empreintes permanentes.

Quelques hypothèses sur la force exercée par le métal mou sur le mobile de choc nous permettent d'établir des formules reliant la limite du temps de contact (lorsque la vitesse d'arrivée croît), les caractéristiques M et r du mobile, la limite du coefficient de rebondissement, et une certaine pression p_0 préconisée pour caractériser la dureté d'un métal mou.

Des graphiques construits avec les résultats de nos mesures permettent d'atteindre diverses grandeurs, en particulier les nombres p_0 et ε_0.

PREMIÈRE PARTIE

LES MÉTHODES STATIQUES ET DYNAMIQUES DE DÉTERMINATION DE LA DURETÉ

I. — ESSAIS STATIQUES

A. — Essais à la bille

a) Principe. — Pour obtenir des résultats comparables dans la détermination de la dureté on emploie une bille en acier spécial de diamètre choisi et une charge adaptée à chaque catégorie de métaux. On a aussi adopté un temps déterminé d'application de la charge.

On calcule soit, 1° le nombre de Meyer $F : \sigma = M$ quotient de la charge par la surface de base de l'empreinte permanente; soit 2° le nombre de Brinell $F : s = B$ où s est la surface de l'empreinte supposée calotte sphérique de base σ (on néglige la petite déformation de la bille).

Soit $D = 2R$ le diamètre de la bille et d celui de σ. Des expériences de Meyer il résulte que $F = a d^n : D^{n-2}$ avec a et n dépendant du métal, les essais ayant duré assez longtemps (5 mn) pour que les diamètres d aient atteint leurs valeurs limites. On a ainsi :

$$M = \frac{F}{\sigma} = \frac{4}{\pi} a \left(\frac{d}{D}\right)^{n-2},$$

$$B = \frac{F}{S} = \frac{2}{\pi} a \left(\frac{d}{D}\right)^{n} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}}.$$

B est une fonction de d qui passe par un maximum quand d croît, c'est-à-dire quand on augmente F. n varie avec la nature du métal essayé entre 1,91 et 2,48 et vaut 2 pour le cuivre recuit.

En appelant h la profondeur de l'empreinte, on trouve :

$$\frac{M}{B} = \frac{s}{\sigma} = \frac{\pi D h}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{D h}{h (D - h)} = \frac{D}{D - h}.$$

b) Remarques. — 1° Des essais sur acier doux recuit ont été effectués sur notre demande, à l'Institut Polytechnique de l'Ouest à Nantes, avec une machine Rockwell. Une charge de 150 kg et une bille de D = 2,5 mm ont donné le même diamètre d'empreinte, que la charge soit appliquée lentement en 3 mn puis supprimée rapidement ou qu'elle soit appliquée très rapidement puis maintenue pendant 3 mn.

Nous avons nous-même pratiqué des essais à la bille sur cuivre recuit dans lesquels la bille est amenée au contact puis brusquement chargée, sans choc. Les résultats ont été les mêmes quelle que soit la durée du maintien de la charge (de 1 s à 6 mn).

Ces essais montrent, tout au moins pour l'acier doux et le cuivre recuit que nous avons examinés, la faible influence du temps de contact dans l'essai statique.

2° Nous avons pratiqué sur un échantillon de plomb commercial désigné plus loin par Plomb II des essais semblables aux précédents sur cuivre recuit, le temps de charge variant de 1 s à 28 h. Deux formules empiriques qui ne peuvent pourtant se déduire l'une de l'autre (ainsi qu'il arrive souvent) rendent également bien compte des résultats. Ce sont :

$$d = a + b \log t \qquad \text{et} \qquad \log \frac{P}{\sigma} = a' - b' \log t,$$

avec a et a' dépendant de D, b et b' n'en dépendant pas. Nous n'avons pas fait varier F (21,500 kg).

Ces essais sont à rapprocher des essais de traction sur le plomb et ses alliages dilués de Greenwood et Korner [8] et de R. L'Hermite [14].

3° Au cours de son étude des propriétés mécaniques du cuivre, Krupkowski [12] ayant obtenu une grande empreinte sur cuivre recuit à l'aide d'une bille de D = 20 mm chargée à F = 10 000 kg, en a essayé divers points avec une petite bille de D = 1 mm chargée à 12 kg. Il a constaté que la formule empirique $B = B_0 \cos i$ rend très bien compte de la dureté à l'intérieur de la grande empreinte, et trouve là une raison de préférer la dureté Meyer à la dureté Brinell. Une autre raison tient à ce qu'avec des charges F croissantes la dureté du fond des empreintes croît constamment. Or il en est de même de la dureté Meyer tandis que la dureté Brinell passe par un maximum.

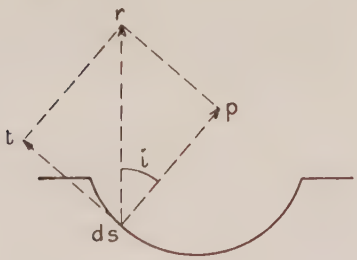


Fig. 1

Pour expliquer la première raison de Krupkowski nous formulons l'hypothèse suivante : la pression normale, exercée par le métal essayé sur la bille (de la forme $p = p_0 \cos i$) est accompagnée d'une pression tangentielle t telle que la résultante r de p et t est en tout point de même direction que l'axe de l'empreinte. Nous trouvons ainsi que r est indépendant de i et que $t = p_0 \sin i$ (*fig.* 1).

A l'équilibre, la résultante générale des actions du métal essayé sur la bille est alors $p_0 \sigma = F$ et p_0 s'identifie avec la dureté Meyer.

La dureté Brinell s'identifie au contraire avec une pression p indépendante de i

dans l'hypothèse ci-dessus, soit p_0. On a en effet alors :

$$t = p_0 \operatorname{tg} i, \qquad r = \frac{p_0}{\cos i}$$

et $\int \frac{p_0}{\cos i} ds \cos i = p_0 s$ s'opposant à la charge F.

Le fait que t deviendrait infini sur le bord d'une empreinte en demi-sphère ou à fond demi-sphérique ne serait pas une objection véritable, car il est certain que dans ce cas l'écoulement du métal est très difficile. Cependant, pour les mêmes raisons que Krupkowski, nous préférons pour l'essai statique le nombre de Meyer à celui de Brinell.

Ajoutons que M. Le Rolland, alors qu'il était Directeur de l'Institut Polytechnique de Nantes, nous signala que divers auteurs pensent que t est constant et égal à la « limite de rupture par allongement, pour plasticité idéale ». Il nous semble que ce pourrait être la charge de rupture par allongement pour un métal écroui au maximum. L'épaisseur du métal ainsi écroui peut être supposée plus grande au fond de l'empreinte qu'ailleurs, et alors t = constante n'est pas incompatible avec $p = p_0 \cos i$ (si l'on ne suppose pas que r est parallèle à la direction d'avancement de la bille). Il faut alors projeter p et t sur cette direction, ce qui, après intégration, donne pour la dureté Meyer, en appelant i_0 la valeur de i au bord de l'empreinte :

$$M = p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 i_0\right) + \frac{2}{3} t \sin i_0.$$

La dureté Brinell est ainsi :

$$B = M \frac{D - h}{D}, \qquad \text{donc} \qquad M \frac{1 + \cos i_0}{2}.$$

Dans l'hypothèse supplémentaire où $p_0 = t$, nous avons calculé que M présenterait un maximum assez peu accusé pour $i_0 \# 45°$, et que B en aurait un beaucoup plus net pour $i_0 \# 30°$.

c) Normalisation des essais a la bille. — Parmi les travaux tendant à normaliser l'essai statique à la bille nous signalerons :

1° Que Kotaro Honda et Kinnosté Takahasi [11] ont mesuré le diamètre d et la profondeur réelle h de l'empreinte permanente ainsi que la profondeur h_1 atteinte pendant la charge. Des deux premières mesures ils déduisent le diamètre D d'une sphère fictive comprenant une calotte de diamètre d et de profondeur h. Ils adoptent pour relier la charge F à h, la relation $F = K h_1 e^{a h_1}$ où K et a caractérisent le métal essayé. Cette formule donnant pour le travail de pénétration :

$$W = \int F \, dh_1 \# K h_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} a h_1\right),$$

ils prennent comme nombre de dureté le rapport de W au volume V de l'empreinte sous charge :

$$H = \frac{W}{V} = \frac{K}{\pi} \frac{3 + 2 a h_1}{3 D - 2 h_1}.$$

Enfin, cette dureté croissant avec la charge, les auteurs considèrent une dureté initiale $H_0 = \frac{K}{\pi D}$.

2° L'essai statique dans les limites de l'élasticité. M. Esnault-Pelterie a proposé de mesurer le diamètre de l'aire de contact de la pièce à essayer et d'une bille très dure assez peu chargée pour ne pas laisser de déformation permanente. D'autre part, Auerbach [2] a constaté, en poussant l'expérience jusqu'à l'apparition des premières fêlures, que celles-ci se produisent dans le plan en dehors de l'aire de contact; ces expériences ont été commentées par M. Brillouin [3], elles montrent l'existence de forces tangentielles.

B. — Essais à la pyramide de diamant

La machine Wickers comprend un diamant en forme de pyramide à base carrée dont deux arêtes opposées forment un angle de 136°. Cet angle a été choisi parce qu'il donne lieu à une correspondance facile entre la dureté Brinell et la diagonale de la base de l'empreinte. Avec une machine Wickers, Smith and Sandland [19] ont trouvé que la dureté est indépendante de la charge.

La machine Rockwell emploie pour les métaux mi-durs et durs un cône de diamant taillé à 120°. Un cadran donne des nombres proportionnels aux profondeurs atteintes. On charge à 10 kg, puis progressivement à 100 kg, on attend l'équilibre et on ramène la charge à 10 kg. On retient le nombre correspondant à la pénétration entre les instants où la charge a été 10 kg.

Remarquons que les empreintes données par une même pyramide sont des volumes semblables.

II. — ESSAIS DYNAMIQUES

A. — L'essai « *à la rayure* » correspond à l'idée la plus ancienne qu'on s'est fait de la dureté. Dans sa forme rationnelle un chariot permet d'appliquer une charge donnée à un diamant de forme déterminée qu'on déplace à vitesse donnée sur le métal essayé. On est conduit à mesurer la largeur du sillon au 1/100 de millimètre et à noter (non sans difficultés) l'effort nécessaire à l'avancement.

B. — L'essai « *Le Rolland* » [13] utilise un pendule dont l'axe, maintenu d'un côté par une lame élastique, repose de l'autre côté, par une bille de diamant, sur le métal essayé. Il y a bientôt, entre support et bille, une surface de contact, et les deux bords de cette surface fixent alternativement l'axe de rotation du pendule. La période correspondant à une amplitude faible θ, répond à la formule $T = T_0\left(1 - \frac{K}{\theta}\right)$, et cette formule contient une constante K d'autant plus grande que le métal essayé est plus mou. Les mesures de T se font par la méthode des coïncidences. Le nombre K est en relation avec le travail de déformation élastique et celui de déformation permanente; il caractérise les propriétés d'une couche très superficielle de la matière essayée (qui peut être quelconque); il dépend de la distance de la bille au centre de gravité du pendule et un peu du diamètre de la bille. L'appareil employé a des dimensions bien déter-

minées, et les nombres retenus pour la dureté sont proportionnels aux inverses des nombres K.

C. — *Essais au choc.* — Ils se font très généralement à l'aide de billes ou de mobiles à bout sphérique.

a) Avant d'étudier quelques travaux sur ce sujet nous remarquerons que le choc peut mettre en jeu, dans le métal essayé, des forces différentes en grandeur de celles qu'on trouve dans un essai statique. C'est ce qu'a montré notamment B. Hopkinson [10]. Ses expériences ont porté sur un long fil vertical, d'acier recuit ou de cuivre, tendu par un assez faible poids qu'un choc détache en rompant le fil. Ce choc, qui dure une fraction de 1/1 000 de seconde est donné par la chute, de un à plusieurs mètres de hauteur, d'une masse cylindrique dans l'axe de laquelle le fil passe librement. En utilisant une théorie élaborée par J. Hopkinson en 1872, l'auteur constate que, pour des efforts extrêmement courts, la limite d'élasticité du métal du fil est très supérieure à celle obtenue dans un essai statique à la traction et peut même être plus grande que la charge de rupture d'un tel essai.

b) Il a été utilisé des appareils nommés scléromètres ou sclérographes caractérisant un métal seulement par la hauteur H′ de rebondissement d'un mobile de masse donnée, terminé par une partie très dure de rayon de courbure donné, tombant d'une hauteur H donnée.

Divers expérimentateurs se sont intéressés à la variation de H′ avec H ainsi qu'à l'empreinte obtenue. Exemples :

1° Edward et Austin [5] ont fait tomber verticalement de hauteurs H comprises entre 100 cm et 150 cm une bille d'acier de D = 10 mm sur une éprouvette de dimensions 50 × 50 × 12,7 mm. L'éprouvette est petite et nous n'avons pas de données sur son mode de fixation. Ils ont trouvé que H — H′, donc aussi le travail absorbé, est proportionnel au volume de l'empreinte.

2° Schneider [18], à l'aide d'un diaphragme à iris, lâche de hauteurs H comprises entre 20 cm et 160 cm, une bille d'acier de 10 mm sur une éprouvette de masse supérieure à 50 fois celle de la bille (pas de données, là encore, sur la fixation de l'éprouvette). L'auteur trouve que log H, log (H — H′), log (H + H′) sont fonctions linéaires de log *d* (*d* diamètre de l'empreinte). Les pentes des droites tracées dépendent du métal. Remarquons que ces droites ne traduisent peut-être qu'une courbure faible pour des graphiques plus étendus.

D. — D'autres auteurs se sont intéressés à H′, à l'empreinte, mais aussi à la durée du contact par choc. Nous citerons :

1° J. P. Andrews [1] s'est occupé du choc de deux sphères identiques de métal mou. Chaque bille, de diamètre 4 cm, est vissée sur une barrette pour pouvoir changer facilement le point d'impact, et la barrette est suspendue par quatre longs fils d'acier. Remarquons que le tout forme un pendule qui est assez loin d'être un pendule simple ou un pendule balistique (surtout quand la densité du métal essayé est faible); il est certain que le rebondissement en est affecté. Andrews ne mesure d'ailleurs pas la vitesse de rebondissement; il la déduit de sa théorie.

Le contact par choc ferme un circuit par lequel un condensateur de un microfarad perd une part de sa charge; le reste est mesuré au galvanomètre balistique et on calcule alors la valeur du temps de contact.

Les photographies qui accompagnent le premier article montrent un bourrelet autour d'une empreinte plane plus ou moins ondulée. Selon l'auteur cet aspect indique le passage par un véritable état liquide; la fusion n'entraînerait pas l'adhérence car l'air qui se trouve dans les fines égratignures laissées par l'outil de tour formerait un film partout interposé.

La théorie développée est basée sur l'hypothèse d'une pression uniforme dans l'aire de contact pendant la formation du bourrelet, et sur certains résultats de la théorie de Hertz sur le choc élastique. Elle rend compte de l'existence d'une limite inférieure du temps de contact par choc, et donne un coefficient de rebondissement $\varepsilon = \frac{v'}{v}$ (rapport de la vitesse de rebondissement à celle d'approche) tendant vers zéro.

Andrews pense que cette conclusion est confirmée par les courbes expérimentales de C. V. Raman [17] mais Raman n'a opéré que pour de faibles valeurs de v. D'autre part, nos expériences personnelles, portant il est vrai sur un cas différent (voir le titre de ce travail), montrent au contraire que ε tend vers une limite inférieure ε_0 non nulle.

Andrews exploite ses mesures électriques en écrivant qu'à l'instant t pris pendant la durée τ du choc, on a, par décharge de la capacité C, dans un circuit comprenant la résistance électrique du contact (de valeur ρ à l'instant t) et une résistance r prise sur un rhéostat :

$$(1) \qquad -\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C\,(r+\rho)} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{dq}{q} = \frac{dt}{C\,(r+\rho)}.$$

Désignant par Q la charge du condensateur avant le choc, Q′ celle après le choc, τ la durée du contact, et traitant ρ comme une quantité indépendante de t, il obtient :

$$(2) \qquad \log \frac{Q}{Q'} = \frac{\tau}{C\,(r+\rho)}.$$

Faisant varier r avec des chocs identiques il trouve que ρ de la formule (2) est nul ou négligeable.

Remarquons que sans ce résultat la formule (2) contiendrait une moyenne très particulière du ρ de la formule (1).

Ajoutons qu'avec un condensateur à diélectrique autre que l'air (pour un microfarad c'est nécessairement le cas) la quantité d'électricité qui passe pendant le temps τ (de l'ordre de 10^{-4} s), n'est due sensiblement qu'à la charge des armatures; mais les décharges mesurées au balistique comprennent une part des charges résiduelles d'autant plus importante que le balistique est de période plus longue. Cela peut ne pas affecter $\frac{Q}{Q'}$ dans la formule (2), mais cela indique que C, figurant dans cette formule, dépend quelque peu de τ. Nous en reparlerons plus loin.

On pourrait encore incriminer les fuites pendant le temps nécessaire aux commutations, mais, à l'aide d'un mécanisme convenable, ce temps peut être rendu très court et toujours le même.

2° M. Moreau, ancien Doyen de la Faculté des Sciences de Rennes [15], a étudié le contact par choc à l'aide d'une bille d'acier très dur formant pendule avec un fil fin de cuivre. Le départ de la bille et son rebondissement étaient connus par l'ombre du fil sur un tableau A, le tout étant éclairé par une source éloignée. Le circuit électrique, constitué comme l'indique la *figure* 2, comprenait un galvanomètre balistique. La résistance r dépourvue de self (et de capacité négligeable) était prise sur une boîte de 1 à 100 000 ohms. « Pour ne pas tenir compte de l'amortissement », M. Moreau shuntait son balistique, de résistance 430 ohms, par une résistance de 5 000 ohms. La f. é. m. E variait de 20 à 300 volts. Le choc se faisait près de l'étau.

M. Moreau a essayé de nombreuses substances, en collant sur les non-conductrices une feuille très mince d'étain. Il a constaté que le coefficient de rebondissement $\varepsilon = \frac{v'}{v}$ tend vers une limite non nulle quand v croît, retrouvant là, dit-il, un résultat de divers expérimentateurs qu'il ne cite pas.

Désignant par ρ une quantité qu'il appelle la résistance électrique moyenne du

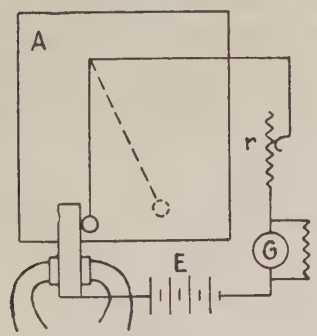


Fig. 2

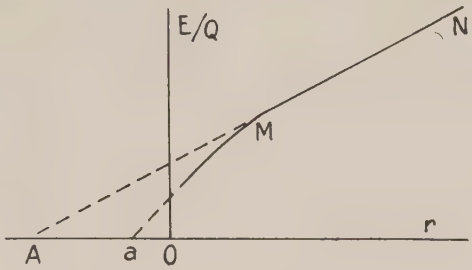


Fig. 3

contact pendant le choc, par Q la quantité d'électricité qui traverse le balistique, et par τ le temps de passage du courant, il écrit :

$$Q = \frac{E}{r + \rho}\tau \qquad \text{ou} \qquad \frac{E}{Q} = \frac{1}{\tau}(r + \rho).$$

Remarquons que si l'on désigne par ρ' la valeur à l'instant t d'une résistance venant s'ajouter à r, la quantité ρ est une moyenne de ρ' définie par :

$$\int_0^Q \rho' \, dq = \rho \, Q.$$

M. Moreau traduisait ses mesures par des graphiques donnant $\frac{E}{Q}$ en fonction de r; il trouvait pour chaque corps essayé une droite MN pour $r > 20\,000$ ohms, et une autre droite pour la partie voisine de $r = 0$ (*fig.* 3). Il en concluait (p. 328) que ρ et τ diminuent notablement avec r et que Oa mesure la résistance propre ρ_p du contact.

Cette résistance ρ_p serait indépendante de la vitesse d'approche (p. 330). Exemple : dans l'essai d'un fer doux à l'aide d'une bille d'acier de masse M = 74 g et de diamètre 2 R = 2,5 cm, il trouve OA = ρ = 11 570 ohms et O*a* = ρ_p = 850 ohms.

Remarques. — Nous avons repris ces expériences; tout d'abord dans le laboratoire de M. Moreau, puis, après sa mort, sous la direction de M. Le Rolland. Nous avons constaté :

a) Que l'encastrement dans un étau est défectueux et qu'une partie des plaques essayées par M. Moreau étaient trop peu épaisses et de masse insuffisante par rapport à celle de certaines de ses billes (voir son mémoire, par ex., p. 315 : bille de 74 g, plaque de cuivre, d'épaisseur 0,5 cm).

b) Que le balistique de M. Moreau avait un important coefficient de self-induction (environ 0,12 henry). Donc, même shunté, il apportait au circuit une self que nos expériences montrent être la seule cause de l'aspect du graphique ci-dessus.

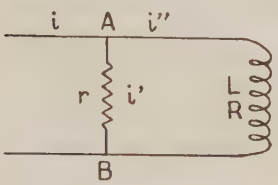


Fig. 4

On peut d'ailleurs montrer qu'en shuntant un balistique on remplace son coefficient de self par un autre qui peut être du même ordre de grandeur.

Soit en effet le schéma ci-contre (*fig.* 4) où L et R sont coefficient de self et résistance d'un appareil, *r* la résistance d'un shunt, *i*, *i'* et *i''* les courants à un instant *t*. Soient L_1 et R_1 la self et la résistance d'un conducteur unique équivalent à l'ensemble qui conserverait *i* et la d. d. p. instantanée *v* entre A et B. On a :

$$ri' = Ri'' + L\frac{di''}{dt} = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt}.$$

L'intégration étendue à toute la durée du courant *i* fournit bien :

$$rq' = Rq'' = R_1 q \qquad \text{avec} \qquad q = q' + q'', \qquad \text{donc} \qquad R_1 = \frac{Rr}{R + r}.$$

Mais, dans le cas d'un choc, *q* dépend de la forme de la fonction $i = f(t)$, donc de la self du circuit. Aussi est-il plus intéressant d'écrire :

$$i = i' + i'' \qquad \text{ou} \qquad \frac{di}{dt} = \frac{di'}{dt} + \frac{di''}{dt},$$

donc :

$$ri' = R(i - i') + L\left(\frac{di}{dt} - \frac{di'}{dt}\right) = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt},$$

équations d'où l'on tire :

$$\left(\frac{r + R}{r} R_1 - R\right) i + \left(\frac{r + R}{r} L_1 + \frac{LR_1}{r} - L\right) \frac{di}{dt} + \frac{L_1 L}{r} \frac{d^2 i}{dt^2} = 0.$$

On peut trouver L_1 et R_1 pour annuler le 1er et le 2e coefficient, non le 3e, et ceci montre que L_1 et R_1 dépendent de la forme de la fonction $i = f(t)$.

Dans l'étude du choc cette forme dépend de divers facteurs et en particulier de la dureté du métal essayé.

Pour faire cependant une application numérique, nous supposerons un instant que $i = I \sin \frac{2\pi t}{T}$ avec t variant de zéro à $\frac{T}{4} = \frac{10^{-4}}{2}$ s, que L = 0,12 henry, R = 430 Ω, r = 5 000 Ω. On obtient L_1 = 0,068 henry qui est bien du même ordre de grandeur que L.

M. Moreau fut renforcé dans son opinion sur la variation de la quantité ρ, quand la résistance r de son montage prend des valeurs de plus en plus faibles, par des expériences qu'il n'a probablement pas publiées mais dont nous avons trouvé la relation dans les papiers qu'il a laissés. Nous en reparlerons page 22.

Nos expériences exposées ci-après, nous ont conduit à modifier largement de nombreux résultats du mémoire de M. Moreau. Quant à la théorie, les formules de la page 318 de sa publication sont voisines de certaines des nôtres.

Nous verrons ce qu'il faut penser de la résistance électrique du contact par choc. Et nous préconiserons une dureté dynamique particulière nouvelle, applicable aux seuls métaux mous, mais qui tient compte de grandeurs calculées pour des vitesses d'approche très grandes que nous supposerons « infinies ». Elle a l'avantage de pouvoir être obtenue par deux formules. Dans l'une, entre la durée de la première phase du choc; dans l'autre, cette durée n'intervient pas.

DEUXIÈME PARTIE

APPAREILLAGE UTILISÉ DANS NOS RECHERCHES

Mobiles employés.

Nous avons d'abord employé des billes de roulement S K F de divers diamètres. Puis pour faire varier le rapport de la masse du mobile au rayon de courbure, nous avons fait tailler à la meule, à partir de grosses billes, des cylindres terminés par deux surfaces sphériques. Enfin la maison S K F a bien voulu nous construire des cylindres terminés par une demi-sphère de faible rayon et de surface durcie par un martelage effectué avant le dernier polissage. Voici quelques valeurs utilisées pour des « cylindres » masse M et rayon de courbure R :

44,72 g et 3,010 cm; 27,415 g et 1,905 cm; 50,38 g et 0,445 cm; 76 g et 0,475 cm.

Nous avons utilisé un pendule avec un fil de cuivre de finesse appropriée à la masse des billes ou cylindres de façon que le pendule soit autant que possible un pendule simple. Les billes ont été directement soudées à leur fil. Les cylindres ont dû, pour la commodité de l'équilibrage, recevoir d'abord un fil suivant le schéma ci-contre

Fig. 5

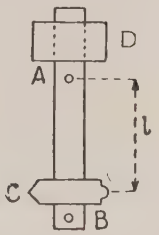


Fig. 6

(*fig.* 5). Les soudures ont été effectuées avec un minimum d'alliage Darcet, alliage conseillé par la maison S K F, parce que la dureté du métal serait déjà affectée par un chauffage à 150°.

A son extrémité supérieure, le fil est serré dans une pince rigide permettant de régler facilement la longueur comptée depuis la pince jusqu'au centre ou à l'axe du mobile (50 cm). La pince est fixée à l'aide de cire Golaz sur un tube en verre épais, lui-même tenu par une forte mâchoire (armée de plomb et d'amiante) portée par un

assemblage de supports formant poutrelle rigide. Le tube de verre permet l'isolement du circuit électrique que doit fermer le contact par choc.

Pour rendre commode la méthode d'essais des métaux mous, décrite à la fin de ce travail, nous avons fait construire à l'I. P. O. de Nantes un pendule balistique. Il comporte la pièce de choc, une petite bille B formant miroir, un roulement à billes A, une masse D de position réglable pour rendre la distance des axes de A et C égale à la longueur du pendule simple synchrone (*fig.* 6).

Plaques essayées.

a) Plaque de même métal que celui des mobiles et de dureté peu inférieure :

Masse 3 810 g, dimensions 120 × 102 × 40 mm.

b) Plaque de cuivre recuit après polissage. Un peu d'oxyde formé pendant le recuit malgré les précautions prises a été enlevé à l'aide de coton imbibé de la partie liquide du brillant « Miror » :

Masse 5 010 g, dimensions 125 × 102 × 43 mm.

c) Plaque obtenue par moulage à l'aide d'un plomb commercial que nous appellerons plomb I :

Masse 4 760 g, dimensions 118 × 102 × 36 mm.

d) Plaque obtenue par moulage d'un autre plomb commercial que nous appellerons plomb II :

Masse 8 270 g, dimensions moyennes 123 × 102 × 60 mm.

e) Plaque d'étain provenant du laboratoire de M. Moreau :

Masse 3 600 g, dimensions moyennes 115 × 100 × 43 mm.

On sait que le plomb et l'étain n'ont pas besoin d'être chauffés pour être recuits.

Le poli atteint n'a laissé que des rayures d'une grande finesse. La face opposée à la face polie n'est pas plane pour le plomb et l'étain; ceci a pour but d'éviter que la réflexion d'une onde par cette seconde face soit régulière et puisse influencer le choc (dans l'hypothèse où l'énergie réfléchie vers le point frappé ne serait pas tout à fait négligeable).

Support et encastrement des plaques.

Pour pouvoir changer facilement le point frappé sur la plaque essayée, cette plaque est montée sur un chariot de tour dont le talon est fixé sur une lourde équerre. Ainsi l'une des glissières du chariot de tour peut être verticale et l'autre horizontale. L'équerre est boulonnée sur un lourd plateau mobile sur glissière horizontale; il permet d'amener la plaque à essayer au contact du mobile (de choc) au repos. La glissière horizontale est boulonnée sur un support orientable par vis tangente; ceci, afin que la face avant de la plaque soit normale au plan dans lequel se déplace le pendule. Le tout repose sur des cales d'ébonite qui assurent la verticalité de la face avant de la plaque et complètent son isolement électrique assuré surtout comme il va être dit.

Comme le montre la *figure* 7, la plaque porte-outil du chariot de tour a reçu une seconde vis et une seconde plaque amovible. La plaque à essayer est fortement serrée, à l'aide d'une longue clef, sur deux côtés. Le serrage a lieu en quatre points par l'intermédiaire de quatre petites cales d'acier. Entre ces cales et la plaque (comme entre

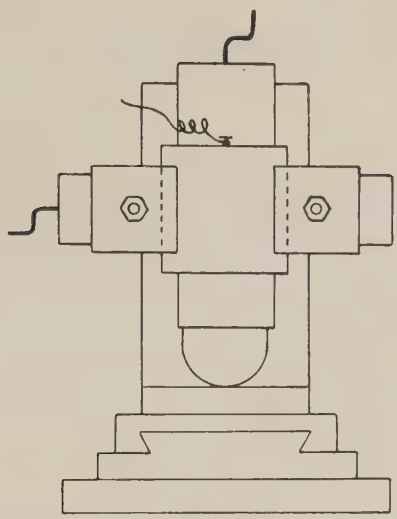


Fig. 7

la plaque et le chariot) nous avons placé, pour l'isolement électrique, plusieurs feuilles de mica.

La masse des plaques essayées est considérable par rapport à celle de notre plus lourd mobile. On voit également que chaque plaque est rendue vraiment solidaire d'un support très lourd. La constance des résultats que nous avons obtenus prouve l'efficacité du montage.

Partie électrique.

Nous avons utilisé :

a) Des accumulateurs de résistance intérieure négligeable;

b) Un rhéostat formé de résistances sans self constituées chacune par un dépôt sur baguette de verre placée sous vide;

c) Le galvanomètre balistique dont s'était servi M. Moreau;

d) De bons condensateurs, à fiches, de type identique.

Nous décrirons les méthodes électriques de mesures au cours de la troisième partie de cet exposé.

TROISIÈME PARTIE

COMPARAISON DE DIVERSES MÉTHODES DE MESURE D'UN TEMPS DE CONTACT PAR CHOC, ET VÉRIFICATION D'UNE HYPOTHÈSE SUR LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE DU CONTACT

Ainsi qu'on le verra plus loin notre étude des métaux mous utilise, entre autres données, les temps de contact par choc. Ces temps sont mesurables par diverses méthodes électriques que nous nous proposons de comparer dans ce chapitre. La première utilise la charge prise par un condensateur pendant le temps de contact par choc, la deuxième la décharge d'un condensateur avec recharge automatique par circuit en dérivation, la troisième est une modification du montage Moreau et la quatrième diffère de la troisième surtout parce qu'on y utilise un fluxmètre qui est mis en court-circuit un temps connu après le choc.

La première et la troisième ont servi à des mesures faites à l'aide d'une bille pour roulements S K F de masse $M = 5{,}59$ g, diamètre $2R = 1{,}111$ cm arrivant à la vitesse $v = 39{,}5$ cm/s sur la surface plane d'un bloc de même métal que celui de la bille et de dureté très voisine; cas où la durée du contact est particulièrement courte. Les résultats sont concordants.

Circonstance intéressante : les chocs étant faibles, et la plaque de grande masse, il a été possible de ne pas utiliser le lourd appareil de fixation déjà décrit et de poser simplement la plaque sur des cales de verre.

PREMIÈRE MÉTHODE

Le contact par choc ferme un circuit comprenant : des accumulateurs de f. é. m. E; une résistance r prise sur un rhéostat (combinaison d'éléments courts déjà cités); un condensateur à diélectrique dont la capacité peut être choisie à l'aide de fiches. Un inverseur à bascule permet de décharger le condensateur dans un galvanomètre balistique (*fig.* 8).

Cet inverseur est commandé par l'arrivée d'une grosse bille d'acier roulant sur une gouttière inclinée. La grosse bille est d'abord accrochée (toujours par le même point pour éviter les effets du magnétisme rémanent) à un électro-aimant commandé par le même interrupteur que l'électro qui lâche la bille de choc. La durée du roulement

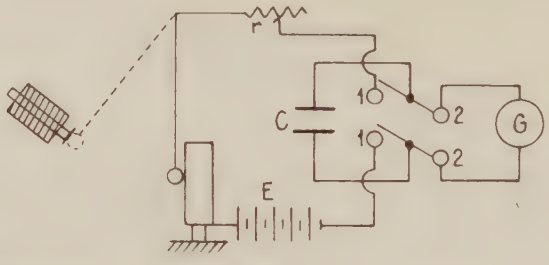


Fig. 8

de la grosse bille a été choisie pour que la décharge du condensateur ait lieu un temps aussi faible que possible après le choc étudié.

L'étalonnage du balistique a été fait en admettant arbitrairement que l'une des capacités marquées est atteinte lorsque la charge dure le temps d'un choc expérimenté avec $r = 0$, et en supposant que la décharge est complète, en un temps très court par rapport au quart de la période des oscillations du balistique. Les mesures sont donc relatives.

Soit Q la charge prise par le condensateur pendant la durée τ du contact par choc, q la charge atteinte à l'instant t et ρ' une résistance qui pourrait *a priori* être supposée celle du contact par choc à l'instant t :

$$E = (r + \rho')\, i + \frac{q}{C}.$$

Pour intégrer entre $t = 0$ et $t = \tau$ traitons ρ' comme une constante, ce qui revient à introduire une moyenne très particulière de ρ' que nous noterons ρ. En remarquant que $q = 0$ pour $t = 0$, il vient :

$$\tau = (r + \rho)\, C \operatorname{Log} \frac{CE}{CE - Q}.$$

Les valeurs de $\frac{Q}{E}$ retenues étant des moyennes entre nombres très voisins venant de chocs autant que possible identiques, nous avons obtenu :

Avec C marqué $5 . 10^{-3}$ μf ou $0{,}5 . 10^{-8}$ farad :

r ohms =	0	955,5	2 302,5	4 888,5	9 829	18 130	23 085.
$10^8 \frac{Q}{E}$ =	0,4868	0,4858	0,4740	0,4203	0,3058	0,2065	0,1739.

Prenons $\frac{Q}{E}\Big|_{r=0}$ comme valeur de C *réellement mise en jeu*. Cherchons par tâtonnements une valeur à donner à ρ pour que la quantité $(r + \rho) \log \frac{CE}{CE - Q}$ n'ait que des

variations faibles et non systématiques, nous trouvons que $\rho = 195$ ohms convient très bien pour les r supérieurs à 4 000 ohms :

$(r + \rho) \log \frac{CE}{CE - Q} =$ » » » 4 394,7 4 300,2 4 392,8 4 468,3.

La moyenne de ces nombres étant 4 389, nous trouvons :

$$\tau = 0{,}4868 \cdot 10^{-8} \frac{4\,389}{\log e} = 0{,}4920 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

Avec C marqué $10^{-2}\,\mu f$, nous avons eu de même :

$r =$	0	955,5	2 302,5	4 888,5	9 829	18 130,
$10^8 \frac{Q}{E} =$	0,9402	0,9385	0,8275	0,6014	0,3860	0,2350.

$\rho = 180\ \Omega$ donne pour $(r + \rho) \log \frac{CE}{CE - Q}$ les nombres :

» 2 287,1 2 246,7 2 297,5 2 286,7.

D'où :

$$\tau = 0{,}9402 \cdot 10^{-8} \times \frac{2\,280}{\log e} = 0{,}4935 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

Avec C marqué $0{,}1\ \mu f$ ou $10 \cdot 10^{-8} f$ et les mêmes r :

$10^8 \frac{Q}{E} =$	10,184	3,850	1,854	0,9402	0,4883	0,2675,

$\rho = 65\ \Omega$ donne pour $(r + \rho) \log \frac{CE}{CE - Q}$ les nombres :

»	210,46	206,63	208,14	211,11	210,28,

$$\tau = 10^{-8} \cdot 10{,}184 \frac{209{,}32}{\log e} = 0{,}4909 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

Avec C marqué $1\ \mu f$ ou $100 \cdot 10^{-8} f$ et les mêmes r :

$\frac{Q}{E} 10^8 =$	97,40	4,631	2,027	0,9808	0,4921	0,2714.

$\rho = 110\ \Omega$ donne pour $(r + \rho) \log \frac{CE}{CE - Q}$ les valeurs :

22,546 22,038 21,823 21,905 22,070.

En éliminant la première valeur la moyenne est 21,959, d'où :

$$\tau = 97{,}4 \cdot 10^{-8} \frac{21{,}959}{\log e} = 0{,}4925 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

Dans les quatre cas, la valeur adoptée pour ρ est petite et elle ne varie pas régulièrement avec C. Ceci montre que si ρ' n'est pas constamment nul on peut émettre 3 hypothèses :

1° Que tout au début et tout à la fin du contact par choc le passage de $\rho' = \infty$ à $\rho' = 0$ et réciproquement ne se fait pas en un temps tout à fait négligeable par rapport à $\tau = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ s, mais les surfaces ont été souvent nettoyées et il faut remarquer que le début et la fin du contact ont lieu à la vitesse calculée pour l'arrivée du mobile, le reste ayant lieu à des vitesses s'échelonnant de v à zéro.

2° Que ce temps étant négligeable, ρ est une résistance localisée quelque part dans le circuit, ailleurs qu'au contact par choc; par exemple dans un contact défectueux ou dans des accumulateurs mal chargés; mais les précautions prises éliminent ces éventualités.

3° Que ρ n'est qu'une apparence provenant de la polarisation progressive du diélectrique du condensateur.

Cette dernière hypothèse nous est apparue en remarquant qu'on retrouve les mêmes valeurs de τ en supposant $\rho = 0$ à condition de prendre pour C une valeur nettement inférieure à $\left|\frac{Q}{E}\right|_{r=0}$ (valeur à trouver par tâtonnement et devant donner $r \log \frac{CE}{CE - Q} =$ constante).

— Pour C marqué 0,005 μf, il faut prendre $C = 0{,}48 \cdot 10^{-8} f$:

$r =$	0	955,5	2302,5	4 888,5	9 829	18 130	23 085 ohms,
$r \log \frac{CE}{CE - Q} =$	»	»	»	4 425,4	4 326,6	4 429,7	4 510,3.

La moyenne 4 423 donne :

$$\tau = 0{,}48 \cdot 10^{-8} \frac{4\,423}{\log e} = 0{,}4888 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

— Pour C marqué 0,01 μf, il faut prendre $C = 0{,}92 \cdot 10^{-8} f$:

$r =$	0	955,5	2 302,5	4 888,5	9 329	18 130 Ω,
$r \log \frac{CE}{CE - Q} =$	»	»	2 297,1	2 251,1	2 324,1	2 322,1.

La moyenne 2 300 donne :

$$\tau = 0{,}92 \cdot 10^{-8} \frac{2\,300}{\log e} = 0{,}4874 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

— Pour C marqué 0,1 μf, il faut prendre $C = 8 \cdot 10^{-8} f$:

$r \log \frac{CE}{CE - Q} =$	»	272,35	263,54	265,30	268,82	267,78.

La moyenne 267,56 donne :

$$\tau = 0{,}8 \cdot 10^{-8} \frac{267{,}56}{\log e} = 0{,}4930 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

— Pour C marqué 1 μf, il faut prendre $C = 23.10^{-8} f$:

$r \log \frac{CE}{CE - Q} =$ » 93,29 92,25 92,52 92,34 93,37.

La moyenne 92,75 donne :

$$\tau = 23.10^{-8} \frac{92,75}{\log e} = 0,4912.10^{-4} \text{ s.}$$

En se reportant aux valeurs de $\frac{Q}{E}$ données plus haut on voit que, plus celles qui sont utilisables sont éloignées de $\left|\frac{Q}{E}\right|_{r=0}$, plus il faut, dans l'hypothèse où $\rho = 0$, prendre pour C une valeur éloignée de ce même $\left|\frac{Q}{E}\right|_{r=0}$.

Cette difficulté ne serait pas apparue si avec 1 μf et la même échelle de valeurs de r nous nous étions occupés de la mesure d'un temps τ de plusieurs fois 10^{-4} s ; pour $\rho = 0$ nous aurions pu prendre $C = \left|\frac{Q}{E}\right|_{r=0}$ ou même une valeur plus grande (voir plus haut, analyse du mémoire Andrews).

Dans sa thèse sur « les pertes dans les diélectriques » en courant alternatif (1923, Paris) et dans ses « Recherches sur les propriétés diélectriques du caoutchouc » (1935), M. Granier [7] montre que la capacité d'un condensateur à diélectrique diminue quand la fréquence augmente.

Partant de là, on peut supposer que, dans nos expériences de charge de condensateur avec f. é. m. constante, la valeur de C réellement mise en jeu à l'instant t est d'autant plus faible que $\frac{dq}{E\,dt}$ est plus grand à cet instant. Or $\frac{dq}{E\,dt}$ est d'autant plus grand pour $t = \tau$ que $\left|\frac{Q}{E}\right|_r$ est plus éloigné de $\left|\frac{Q}{E}\right|_{r=0}$, c'est-à-dire qu'à l'instant $t = \tau$, on est plus loin de la charge maximum (*fig.* 9). Strictement, alors, il faudrait admettre, pour un condensateur donné, autant de valeurs de C à l'instant $t = \tau$ qu'on emploie de valeurs de r. Cependant, comme le montrent les résultats des calculs de τ ci-dessus, il est possible en pratique d'admettre une valeur moyenne de C pour toutes les valeurs de r intérieures à un intervalle étendu.

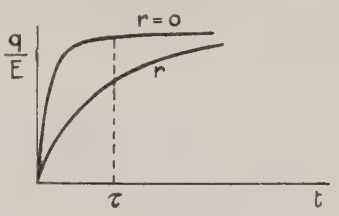


Fig. 9

Il est toutefois étonnant que dans le cas du condensateur marqué 1 μf nous ayons dû admettre une valeur mise en jeu aussi faible que 0,23 μf. Cet exemple fait supposer que dans le cas habituel de la charge d'un condensateur, on doit envisager la charge qui a pénétré dans le diélectrique comme une part importante de la charge totale.

Quoi qu'il en soit de son intérêt théorique, la seconde façon d'exploiter les mesures de $\frac{Q}{E}$ pour arriver à la connaissance de la durée τ donne lieu à des tâtonnements aussi longs que la première. Les deux manières sont pratiquement équivalentes.

DEUXIÈME MÉTHODE

Nous l'avons notée lorsque, longtemps après la mort de M. Moreau, nous avons eu l'occasion de prendre connaissance de ses manuscrits. M. Moreau ne publia pas ce montage parce qu'il lui avait donné, au sujet de τ et surtout de ρ, des résultats contredisant ceux obtenus par d'autres montages qu'il croyait équivalents. Dans ces derniers, le balistique se trouvait en série avec le contact par choc, et ainsi intervenait par sa self.

La méthode utilise la décharge partielle d'un condensateur, avec recharge immédiate, sans commutateur. Le balistique enregistre évidemment toute la quantité d'électricité qui a traversé le contact par choc de la bille B sur la plaque P.

Avec $C = 0{,}2\ \mu f$, r inférieur à 2000 ohms, $r' = 5 . 10^5$ ohms, M. Moreau employait la formule simple :

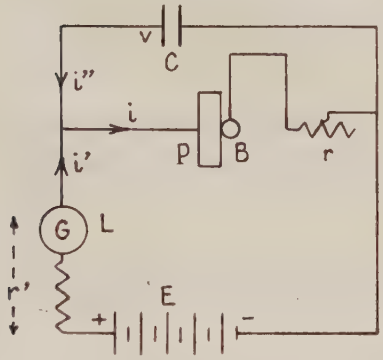


Fig. 10

$$\tau = (r + \rho)\ C\ \mathrm{Log}\ \frac{CE}{CE - Q}$$

qui suppose négligeable la charge fournie par la pile pendant la durée τ. Dans ces conditions, avec τ voisin de $3 . 10^{-4}$ s, il trouvait $\rho = 0$. Il semble que $0{,}2\ \mu f$ était la valeur marquée du condensateur.

Nous avons fait, en supposant $\rho = 0$, l'étude théorique complète de la charge qui traverse le contact par choc.

La f. c. é. m. du balistique est négligeable mais non la self de son cadre, puisque nous avons trouvé pour l'appareil de M. Moreau, $L = 0{,}12 \pm 0{,}02$ henry. Avec les notations de la *figure* 10, il vient :

$$i - i' = i'' = -\frac{dq}{dt} \qquad \text{ou} \qquad -C\frac{dv}{dt},$$

$$v = ri = E - L\frac{di'}{dt} - r'i',$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d^2 i'}{dt^2} + \left(\frac{1}{rC} + \frac{r'}{L}\right)\frac{di'}{dt} + \frac{r + r'}{rLC}\,i' = \frac{E}{rLC},$$

dont l'équation caractéristique est :

$$\alpha^2 + \left(\frac{1}{rC} + \frac{r'}{L}\right)\alpha + \frac{r + r'}{rLC} = 0;$$

A et B étant des constantes, on a :

$$i' = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + \frac{E}{r + r'},$$

puis :

$$i = \frac{E}{r + r'} - \frac{A}{r} e^{\alpha_1 t} (L\alpha_1 + r') - \frac{B}{r} e^{\alpha_2 t} (L\alpha_2 + r').$$

On détermine les constantes par la condition que, à l'époque $t = 0$, on ait :

$$v = E, \qquad \text{d'où} \qquad i' = 0 \qquad \text{et} \qquad i = \frac{E}{r}$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{Q}{E} = \frac{1}{E} \int_0^\tau i\, dt$$

$$= \frac{1}{r + r'} \left\{ \tau + \frac{Cr'^2 - L}{r + r'} - \frac{1}{r(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{\alpha_1 \tau} (L\alpha_1 + r') - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} e^{\alpha_2 \tau} (L\alpha_2 + r') \right] \right\}.$$

Quelques applications numériques, avec des valeurs très diverses de C et de r, pour $L = 0{,}12$ henry et $r' = 5.10^5$ ohms, nous ont montré que la formule simplifiée de M. Moreau est toujours très largement suffisante. M. Moreau avait toutefois pris r' trop grand pour la période d'oscillation de son balistique, cela influait sur la valeur trouvée pour τ, non sur celle de ρ.

Pour un temps τ très petit, il est évident qu'on trouverait, en pratique, avec diverses valeurs de capacités à diélectrique, des difficultés du même ordre que dans la première méthode. Par exemple, le début de la décharge se fait par emprunt aux seules charges superficielles; donc, suivant ce que nous avons vu, il s'introduit une valeur de C qui peut être très inférieure à la valeur marquée.

TROISIÈME MÉTHODE

Le contact par choc ferme un circuit comprenant accumulateurs, rhéostat fait d'éléments courts comme plus haut, galvanomètre balistique de self L et un condensateur shunté tel que $L = Cr'^2$ (voir *fig.* 11). Supposons d'abord la self compensée par le condensateur shunté. Comme la f. c. é. m. du balistique reste ici négligeable, il vient, en appelant ρ' une résistance qui pourrait être *a priori* celle du contact à l'instant t :

$$E\, dt = (r + \rho')\, dq.$$

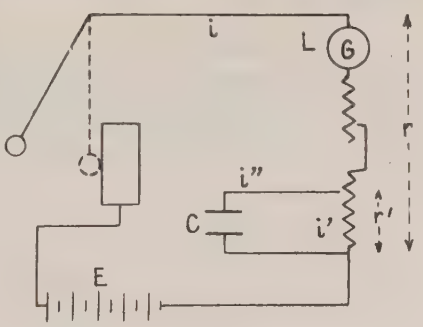


Fig. 11

Soit Q la quantité mesurée par le balistique. Posons :

$$\int_0^\tau \rho'\, dq = \rho\, Q,$$

ce qui introduit une moyenne ρ très particulière de ρ' :

$$(1) \qquad E\tau = (r + q)\, Q \qquad \text{ou} \qquad \frac{E}{Q} = \frac{1}{\tau} (r + \rho),$$

Sans le condensateur shunté, que nous avons adjoint à son montage, M. Moreau trouvait $\frac{E}{Q}$ fonction linéaire de r pour $r > 20\,000$ ohms.

Avec le montage de la figure ci-dessus comprenant le balistique de M. Moreau (pour lequel nous avons trouvé $L = 0{,}12 \pm 0{,}02$ henry), $C = 2\,\mu f$ et $r' = 245\,\Omega$, soit $L = Cr'^2$, nous avons obtenu $\frac{E}{Q}$ fonction linéaire de r (dont τ et ρ indépendants de r) pour $r > 2000$ ohms.

L'amélioration est importante puisqu'elle permet d'employer des valeurs de E beaucoup plus faibles. Elle montre en outre qu'il n'y a pas lieu de considérer la quantité ρ_p que M. Moreau appelait la résistance propre du contact.

Avec le choc étudié plus haut par la première méthode, nous avons obtenu $\tau = 0{,}490 \cdot 10^{-4}$ s et $\rho = 2\,750$ ohms. La valeur de τ est en très bon accord avec celle déjà vue, ce qui qualifie la troisième méthode, par ailleurs d'emploi beaucoup plus commode que la première ou la deuxième. La valeur trouvée ici pour ρ montre que cette quantité ne représente pas la résistance du contact par choc. Nous verrons que c'est surtout une fiction mathématique et que la formule (1) est une formule quasi empirique.

La formule (1) a d'autre part servi au calcul des temps τ relatifs à des chocs très variés sur la plaque épaisse de métal très dur, encastrée cette fois dans le lourd support décrit plus haut. Tous ces chocs ont donné lieu à des vitesses de rebondissement très voisines de celles d'approche et peuvent dès lors être considérés comme relevant pratiquement de la théorie de Hertz [9] sur le choc élastique. La formule de cette théorie qui veut que τ soit proportionnel à $\left(\frac{M^2}{Rv}\right)^{\frac{1}{5}}$ s'est trouvée vérifiée de façon fort satisfaisante, même pour le coefficient de proportionnalité (voir en annexe les tableaux de nombres et l'application de la formule de Hertz). Cela nous autorise à dire que la formule (1) de la troisième méthode permet d'atteindre correctement toutes valeurs de τ et par exemple celles dont nous aurons à nous occuper dans le chapitre relatif aux essais de métaux mous.

Pour élucider l'origine de la quantité ρ de la formule (1), traitons le problème du choc en supposant la résistance électrique du contact constamment nulle pendant la durée τ et en supposant la self L bien définie.

Les notations de la figure donnent :

$$i = i' + i'';$$

$$r' i' = \frac{q}{C}, \qquad \text{d'où} \qquad i'' = Cr' \frac{di'}{dt};$$

$$E = r' i' + i (r - r') + L \frac{di}{dt}$$

La troisième équation devrait comprendre un terme pour la f. c. é. m. du balistique, mais nous avons calculé que dans nos expériences cette f. c. é. m. n'a jamais dépassé, à la fin du contact par choc, 0,004 volt, or la f. é. m. des accumulateurs n'a jamais été inférieure à 2 volts.

De ces équations, on tire une équation en i' :

$$\frac{d^2 i'}{dt^2} + \frac{L - Cr'^2 + Crr'}{LCr'} \frac{di'}{dt} + \frac{r}{LCr'} i' = \frac{E}{LCr'},$$

d'équation caractéristique :

$$\alpha^2 + \frac{L - Cr'^2 + Crr'}{LCr'} \alpha + \frac{r}{LCr'} = 0.$$

Pourvu que le discriminant soit positif, on a :

$$i' = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + \frac{E}{r},$$

$$i'' = Cr' A \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + Cr' B \alpha_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Les constantes A et B sont données par la condition que pour $t = 0$, on ait à la fois $i' = 0$ et $i'' = 0$.

Profitant de ce que $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{r}{LCr'}$, nous obtenons :

$$i'' = \frac{E}{L} \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2};$$

$$i = \frac{E}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[e^{\alpha_1 t} \left(\alpha_2 + \frac{r}{L} \right) - e^{\alpha_2 t} \left(\alpha_1 + \frac{r}{L} \right) \right] \right\};$$

$$\left| \frac{di''}{dt} \right|_{t=0} = \left| \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L};$$

$\frac{di}{dt} = 0$ pour t_1, tel que :

$$e^{(\alpha_1 - \alpha_2) t_1} = \frac{1 + Cr' \alpha_2}{1 + Cr' \alpha_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_2 \left(\alpha_1 + \frac{r}{L} \right)}{\alpha_1 \left(\alpha_2 + \frac{r}{L} \right)}.$$

d'où i maximum égale :

$$\frac{E}{r} \left[1 - e^{\alpha_1 t_1} (1 + Cr' \alpha_1) \right].$$

Si le contact dure un temps τ nous trouvons que la pile débite pendant ce temps une quantité d'électricité :

$$Q = \int_0^\tau i \, dt = \frac{E}{r} \left\{ \tau + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\frac{e^{\alpha_1 \tau} - 1}{\alpha_1} \left(\alpha_2 + \frac{r}{L} \right) - \frac{e^{\alpha_2 \tau} - 1}{\alpha_2} \left(\alpha_1 + \frac{r}{L} \right) \right] \right\}.$$

Remarque I. — Avec $\tau = \infty$ et le fait que l'équation en α donne α_1 et α_2 négatifs, on obtient :

$$\int_0^\infty \left(i - \frac{E}{r} \right) dt = \frac{E}{r^2} (Cr'^2 - L),$$

c'est-à-dire zéro pour $L = Cr'^2$, résultat classique dont on sait que la démonstration directe demande beaucoup moins de calculs.

Remarque II. — Pour $L = Cr'^2$ les formules pour i et Q se simplifient parce qu'alors :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{r}{L}.$$

Il vient :

$$i = \frac{E}{r}\left(1 - \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) \quad \text{et} \quad Q = \frac{E}{r}\left(\tau - \frac{e^{\alpha_1 \tau} - e^{\alpha_2 \tau}}{\alpha_1 - \alpha_2}\right).$$

Appliquons numériquement ces calculs. Soit $L = 0{,}12$ henry la self du cadre du galvanomètre balistique employé (sans tenir compte de l'imprécision de la mesure de cette self à fer); faisons $L = Cr'^2$ par $C = 2.10^{-6}$ farad, d'où par conséquent $r' = 244$ ohms 94, et $r = 20\ r'$, donc $r = 4898$ ohms 8. Nous obtenons :

$$\alpha_1 = -0{,}21555.10^4 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -3{,}8668.10^4.$$

$i = \dfrac{E}{4898{,}8} \times a$ avec le tableau suivant :

$10^4\ t = 0$	0,2	0,6	0,8	$10^4\ t_1 = 1{,}580$	3	∞,
$10^4\ a = 0$	0,5683	0,9479	1,00196	$10^4\ a_{max} = 1{,}0398$	1,03113	1.

La fonction $i = f(t)$ a un maximum très peu accentué, dépassant $\dfrac{E}{r}$ d'environ

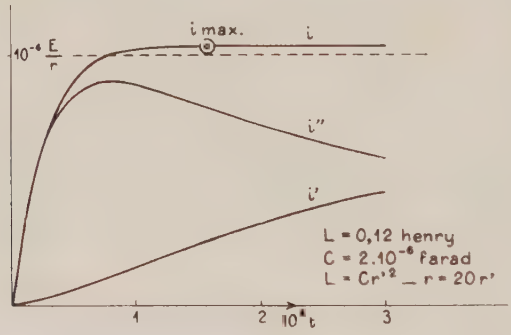


Fig. 12

4 % (*fig.* 12). Comme on pouvait s'y attendre elle est constamment au-dessus de ce qu'on aurait sans condensateur shunté, on aurait alors :

$$i = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-\frac{rt}{L}}\right).$$

La fonction $i'' = f(t)$ (courant dans le condensateur) donne de même :

$$i'' = \frac{E}{4898{,}8} \times b \quad \text{avec} \quad b_{max} = 0{,}8904.10^{-4},$$

pour $t = 0{,}7907.10^{-4}$ s, et un point d'inflexion ou $b = 0{,}7927.10^{-4}$ pour $t = 1{,}5814.10^{-4}$ s.

Continuant les calculs numériques avec les mêmes valeurs pour L, C, r' mais des valeurs variées pour r nous avons obtenu pour $\tau = 0{,}6.10^{-4}$ s une valeur de $\frac{Q}{E}$ pour chaque valeur de r. Puis nous avons introduit cette valeur de $\frac{Q}{E}$ dans la formule empirique $\frac{Q}{E} = \frac{\tau}{r + \rho}$ pour calculer la quantité ρ qu'elle comporte.

Le tableau suivant donne nos résultats :

$r =$	2 449,4	4 898,8	9 797,6	19 595,2,
$10^4\, r \frac{Q}{E} =$	0,26242	0,3863	0,48723	0,54457,
$\rho =$	3 151	2 710	2 267,7	1 994,5 Ω.

On voit que, loin d'être égaux, les nombres ρ décroissent régulièrement (ρ est multiplié par environ $\frac{2}{3}$ quand r est multiplié par 8).

Toujours avec les mêmes données, mais pour $t = 1{,}2\ 10^{-4}$ s, nous avons calculé que :

$\rho =$ 1 261 1 032 894 834 Ω.

De même avec $\tau = 2{,}4.10^{-4}$ s :

$\rho =$ 426,0 357,4 328,8 317,3 Ω.

Les rapports des valeurs de ρ pour $\tau = 0{,}6.10^{-4}$ s à celles pour $\tau = 1{,}2.10^{-4}$ s sont donc :

2,49 2,62 2,53 2,39,

et ceux des valeurs de ρ pour $\tau = 1{,}2.10^{-4}$ s à celles pour $\tau = 2{,}4.10^{-4}$ s sont :

2,96 2,88 2,72 2,63.

Ces rapports sont toujours nettement différents de l'inverse du rapport des valeurs de τ envisagées.

— Reprenant l'application numérique avec les nombres :

$$r = 4\,898{,}8, \qquad r' = 244{,}94, \qquad L = 0{,}12, \qquad \tau = 0{,}6.10^{-4}\ \text{s},$$

mais avec des valeurs variées de C (l'une seulement satisfaisant à $L = Cr'^2$), nous avons obtenu :

C en $\mu f =$	0	0,25	2	8	∞,
$10^4\, r \frac{Q}{E} =$	0,3762	0,3852	0,3863	0,3866	0,3866,
$\rho =$	2 914	2 731	2 710	2 704	2 704 ohms.

Comme la discussion des équations générales (p. 24) l'indique, $C = \infty$ donne pour $\frac{Q}{E}$ une valeur qu'on retrouve en mettant r' en court-circuit. Quand on part de $C = 0$ vers $C = \infty$ on s'achemine vers ce résultat simple. Ce résultat est presque atteint ici pour $C = 2\,\mu f$ qui fait $L = Cr'^2$; mais dans un autre exemple ($r = 2\,449{,}4$, $r' = 244{,}94$, $L = 0{,}12$, $\tau = 2{,}4 . 10^{-4}$ s) nous avons calculé que $\frac{Q}{E}$ pour $C = 2\,\mu f$ diffère de 1,2 % de $\frac{Q}{E}$ pour $C = \infty$.

On remarque que pour réaliser le montage en vue d'expériences de mesure de $\frac{Q}{E}$ il n'est pas nécessaire de connaître C avec précision.

Retenons surtout que, dans le problème traité, la quantité ρ de la formule empirique (1) dépend de r; or en pratique, comme on l'a vu, elle n'en dépend pas pourvu que r soit supérieur à 2 000 ohms.

Quelques exemples de mesures réelles montreront cependant que la concordance entre les ρ mesurés et les ρ calculés est assez bonne :

1° Un mobile de $M = 44{,}72$ g et $R = 3{,}010$ cm arrivant à $v = 180$ cm/s sur la plaque d'acier de métal identique à celui des mobiles a donné $\tau = 0{,}5908 . 10^{-4}$ et $\rho = 1\,977\ \Omega$, or cette valeur de ρ se situe à peu près à la fin de l'échelle des ρ calculés pour $\tau = 0{,}6 . 10^{-4}$;

2° Un mobile $M = 27{,}415$ g et $R = 1{,}905$ cm, arrivant à $v = 62{,}64$ cm/s sur la plaque « Plomb I » a donné $\tau = 1{,}216 . 10^{-4}$ s et $\rho = 957\ \Omega$, or cette valeur de ρ se situe dans l'échelle des ρ calculés pour $\tau = 1{,}2 . 10^{-4}$;

3° Une bille $M = 94{,}92$ g, $R = 1{,}430$ cm, arrivant à $v = 31{,}32$ cm/s sur la plaque « Plomb I » a donné $\tau = 2{,}412 . 10^{-4}$ s et $\rho = 426\ \Omega$, or cette valeur de ρ se trouve au début de l'échelle des ρ calculés pour $\tau = 2{,}4 . 10^{-4}$ s.

Au désaccord entre la variation lente de ρ calculé quand on fait varier r et l'indépendance que présente ρ mesuré vis-à-vis de r on peut trouver diverses causes; malheureusement aucune ne se prête facilement au calcul. Elles découlent du fait que si on passe du cas d'une valeur de r à celui d'une valeur plus grande la courbe $i = f(t)$ figurée plus haut se rapproche de l'axe des ordonnées.

1° On peut penser que la résistance du contact par choc met un temps non négligeable au début de τ pour passer de l'infini à zéro (et réciproquement à la fin), ce qui diminue $\frac{Q}{E}$ en valeur relative à mesure que r considéré est plus grand.

2° De même par $\frac{di}{dt}$ plus grand au début de τ, les pertes d'énergie par courants de Foucault dans le fer de la self croissent. Par contre, les pertes dans le diélectrique du condensateur diminuent ainsi que nous l'avons vu à propos des mesures de τ par la première méthode. Il y aurait encore intérêt à tenir compte de l'influence de l'hystérésis du fer de la self.

QUATRIÈME MÉTHODE

Elle dérive de la troisième par remplacement du galvanomètre balistique par un fluxmètre F (*fig.* 13). La valeur de la self du cadre est assez faible pour qu'on ne trouve aucun avantage à l'emploi d'un condensateur shunté pourvu que r soit assez grand. On ne peut songer ici à shunter le fluxmètre comme cela se fait pour la mesure de temps relativement grands; la sensibilité serait insuffisante. Il faut le mettre en court-circuit, donc l'arrêter brusquement un temps t_0, exactement connu, après que le courant lui a communiqué, pendant le contact par choc, une vitesse angulaire ω_0; l'aiguille a alors balayé un angle $\theta_0 = \omega_0 t_0$.

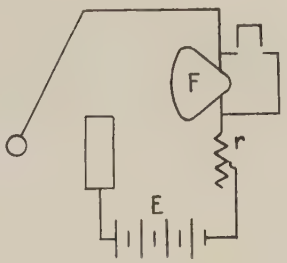


Fig. 13

Cherchons la relation entre θ_0 et le temps τ du contact. Le champ étant radial dans un fluxmètre, le flux coupé par les fils du cadre dans une rotation de θ radians est HS θ, soit $\Phi_0 \theta$, ce qui indique une f. c. é. m. $10^{-8}\,\Phi_0\,\omega$ volts. Nous avons donc, sans shunt, en utilisant les notations déjà employées à propos du balistique :

$$E - 10^{-8}\,\Phi_0\,\omega = (r + \rho')\,i + L\,\frac{di}{dt}.$$

Si r n'est pas trop petit cette équation se réduit pratiquement à $E = (r + \rho')\,i$.

En posant comme plus haut :

$$\int_0^{\tau} \rho'\,dq = \rho\,Q,$$

il vient :

$$\frac{Q}{E} = \frac{\tau}{r + \rho}$$

Pour introduire ω_0 il faut remarquer que, pour un champ radial, le moment des forces appliquées au cadre à l'instant t (pris dans le temps τ) a pour expression $\frac{i}{10}\,\Phi_0$ lorsque le courant a la valeur i.

Le moment cinétique est alors, si I est le moment d'inertie du cadre :

$$I\,d\omega = \frac{i}{10}\,\Phi_0\,dt \qquad \text{ou} \qquad 10\,I\,d\omega = \Phi_0\,dq,$$

ce qui donne par intégration :

$$10\,I\,\omega_0 = \Phi_0\,Q.$$

Finalement :

$$\frac{10\,I\,\omega_0}{\Phi_0\,E} = \frac{\tau}{r + \rho} \qquad \text{ou} \qquad \frac{10\,I\,\theta_0}{\Phi_0\,E} = \frac{\tau\,t_0}{r + \rho}.$$

Nous avons trouvé qu'avec un fluxmètre Grassot du type courant ($I = 30$ C. G. S., $\Phi_0 = 3.10^6$) il faut pour obtenir une déviation de 60 divisions sur le cadran, soit 0,44 radian, avec $\tau = 10^{-4}$ s et $t_0 = 10$ s :

$$E = 0{,}044\ (r + \rho).$$

Soit déjà 132 volts pour $r + \rho = 3\,000$ ohms, ce qui n'est toutefois pas irréalisable avec des accumulateurs. Mais la complication d'avoir à réaliser un temps t_0 de l'ordre de 10 s avec une bonne fidélité de reproduction rend la quatrième méthode moins commode et moins sûre que la troisième.

CONCLUSION

1° La troisième méthode l'emporte sur les autres : simplicité du montage, plus grande facilité pour calculer le temps de contact par choc, sûreté du résultat.

2° La résistance électrique du contact par choc est pratiquement nulle, sauf peut-être au début immédiat du contact et tout à fait à la fin. La résistance introduite par M. Moreau dans sa formule n'a donc pas de réalité physique.

Remarque I

L'exposé qui précède n'a pas suivi l'ordre chronologique de nos recherches. En réalité nous avons commencé en utilisant la formule (1) du mémoire Moreau puis la formule analogue du procédé n° 3; nous les avons employées pour des chocs sur acier doux, puis sur des métaux mous, ensuite sur acier très dur, enfin sur d'autres métaux mous. Croyant d'abord pouvoir attribuer les valeurs importantes trouvées pour ρ à l'existence d'une couche d'air qui resterait interposée, nous avons effectué des chocs dans le vide avec la bille de 5,59 g. Or nous avons obtenu le même nombre en opérant dans le vide cathodique ou à la pression atmosphérique. Nous avons pensé alors aux gaz adsorbés, à une pellicule superficielle très mince d'oxyde formant un semi-conducteur; enfin nous avons été conduit à l'hypothèse qui a pu devenir la seconde des conclusions formulées plus haut.

Remarque II

La troisième méthode se prête facilement à l'établissement et à l'utilisation d'un graphique obtenu en portant les durées τ en ordonnées et, en abscisses les quantités $\frac{Q}{E}$ relatives à une valeur donnée de la résistance r du circuit. Ce graphique est possible car il est évident que pour un galvanomètre balistique de self L donnée, un condensateur shunté donné et r donné la quantité $\frac{Q}{E}$ ne dépend que de τ; le temps τ est en effet conditionné par le métal essayé et le mobile utilisé.

Nous avons construit un graphique pour chacune des cinq valeurs de r que nous avons employées avec des mobiles très divers dans nos expériences sur les quatre métaux mous cités en deuxième partie et sur le métal identique à celui des mobiles.

Chaque tracé passe évidemment par le point de coordonnées $\frac{Q}{E} = 0$, $\tau = 0$, mais devient une droite à partir d'une valeur de τ d'autant plus faible que le graphique se rapporte à une plus grande valeur de r.

Avec $r = 3\,400$ ohms, pour $\tau \geqq 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ s, on a une droite d'équation $\tau = 0{,}205 \cdot 10^{-4} + 0{,}355 \cdot 10^{4} \frac{Q}{E}$.

Nous avons ainsi un moyen très rapide de connaître le temps de contact relatif à un seul choc pratiqué sur un métal quelconque à l'aide d'un mobile quelconque très dur et à bout sphérique. Il suffit de mesurer la quantité $\frac{Q}{E}$ correspondante. (On trouvera un complément sur cette question sous le titre III de l'annexe.)

QUATRIÈME PARTIE

ÉTUDE DES MÉTAUX MOUS

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'établir une théorie du choc d'un mobile très dur à bout sphérique sur plaque épaisse de métal mou bien encastrée dans un lourd support, et d'en appliquer les formules finales à des cas concrets. Cette théorie utilise diverses hypothèses et l'existence, prouvée par l'expérience, d'une limite inférieure ε_0 du coefficient de rebondissement $\varepsilon = \frac{v'}{v}$ (rapport de la vitesse de rebondissement à celle d'arrivée du mobile).

Nous commencerons par l'exposé des expériences conduisant à la connaissance de ε_0 et par l'indication des méthodes de mesure de diverses grandeurs utilisées en fin de chapitre, puis viendra la théorie, ensuite son application (au cours de laquelle nous aurons une nouvelle confirmation de l'existence de ε_0), et une justification *a posteriori* des hypothèses faites, enfin nous conclurons en préconisant deux constantes pour la caractérisation des propriétés mécaniques des métaux mous.

I. — MESURE DES VITESSES DE REBONDISSEMENT ET RÉSULTATS

Le mobile de choc formant pendule avec un fil aussi fin que possible nous avons d'abord, comme M. Moreau, utilisé l'ombre portée par le fil sur un écran; le pendule étant éclairé par une lampe éloignée.

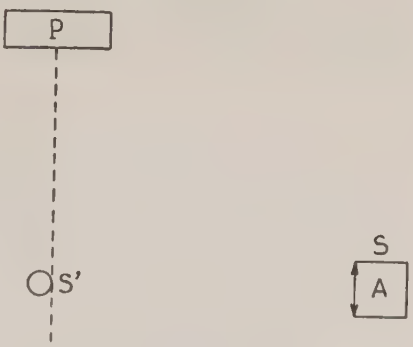


Fig. 14

De petites vibrations du fil rendant assez souvent difficile l'observation précise, nous avons par la suite (pour le plomb II et l'étain) remplacé ce dispositif par le suivant (*fig.* 14) : une lampe S (de 6 volts, 50 watts, à filament très ramassé) donne avec le miroir sphérique que constitue la bille (ou une très petite bille soudée au mobile) une image S′ très proche de la surface brillante. Le déplacement de S′ est photographié à l'aide de l'appareil A. Une seconde pose permet d'obtenir sur le même cliché l'image d'une règle

graduée (en pointillé sur le schéma ci-contre de la projection horizontale du montage) dont l'origine est à une distance connue de la surface de la plaque P de métal mou.

Craignant de voiler nos plaques ou de diminuer les contrastes, nous avons donc renoncé au dispositif connu qui consisterait ici à projeter l'image d'une règle dans le plan d'oscillation de S'.

Nos clichés montrent nettement la partie de la trajectoire de S' qui est voisine du point de vitesse nulle; les lectures se font avec une loupe, le cliché est supporté et éclairé par un verre dépoli; il est tenu compte de l'obliquité des rayons (allant de la lampe à la bille) par rapport au plan vertical dans lequel S' se déplace. De la connaissance du maximum de la distance horizontale PS' on déduit la vitesse de rebondissement.

En outre, pour le plomb I, le plomb II et l'étain, nous avons pratiqué des chutes verticales de billes allant jusqu'à la hauteur H = 185 cm, avec un dispositif analogue au précédent pour la mesure de la hauteur H' de rebondissement.

Chaque plaque de métal mou a été essayée avec 2, 3, ou même 4 mobiles différents, afin de rechercher l'influence de la masse M et du rayon de courbure R des mobiles sur le coefficient ε et, simultanément, sur le temps τ de contact ainsi que sur la profondeur h de l'empreinte permanente.

Pour chaque mobile, nous avons utilisé plusieurs vitesses d'approche v très variées (allant par exemple de 22 cm/s à 180 cm/s, dans d'autres cas, de 50 à 620 cm/s). Il en résulte que pour une plaque, un mobile et une vitesse donnés, nous n'avons pu pratiquer qu'un petit nombre de chocs. Comme nos métaux ne se sont pas tous révélés très homogènes, nous avons utilisé pour ce petit nombre de chocs, des points choisis dans des régions de la plaque éloignées les unes des autres. Malgré cette précaution il est évident que chaque valeur de ε retenue comme moyenne ne représente qu'imparfaitement la plaque entière. En conséquence, un graphique utilisant les valeurs de ε relatives à une même plaque, un même mobile et diverses valeurs de v ne donne pas lieu, en général, à un tracé très sûr.

Nous avons donc cherché par tâtonnements méthodiques (exposés en détail page 41), quelles quantités on pourrait porter en ordonnées et en abscisses pour obtenir avec une même plaque et divers mobiles un seul tracé passant aussi près que possible de tous les points. Nous avons ensuite amélioré le procédé afin d'obtenir pour ce tracé unique une droite, celle-ci permettant les extrapolations les plus faciles et les plus sûres.

Nous avons obtenu les meilleurs résultats dans ce sens en portant en ordonnées et en abscisses les quantités désignées ci-après :

Pour l'étain : ε^2 et $\dfrac{R}{v'\sqrt{M}}$ (une seule droite pour deux polissages).

Pour le plomb I : ε^2 et $\dfrac{R}{v\sqrt{M}}$ ou $\dfrac{R}{h}$ avec h profondeur de l'empreinte.

(Ici la droite est suivie chaque fois d'une courbe reliant les points relatifs aux faibles chocs.)

Pour le cuivre : ε^4 et $\dfrac{R}{h}$.

Pour le plomb II : ε et $\frac{1}{v'}$ ou ε^2 avec $\frac{1}{v}$ ou $\frac{1}{h}$.

(Ici chaque mobile donne une droite déterminée par des points bien alignés.) On peut évidemment confondre les 2 droites en prenant des coordonnées convenables, exemple ε^2 et $\frac{1}{hR^{0,622}}$.

Tous ces graphiques montrent clairement que ε tend vers une limite ε_0 non nulle lorsque v tend vers l'infini. Nous avons trouvé :

Pour l'étain : $\varepsilon_0 = 0{,}228$ par $\varepsilon_0^2 = 0{,}052$.

Pour le plomb I : $\varepsilon_0 = 0{,}282$ par $\varepsilon_0^2 = 0{,}0795$.

Pour le cuivre recuit : $\varepsilon_0 = 0{,}266$ ou $\varepsilon_0^2 = 0{,}0707$ par $\varepsilon_0^4 = 0{,}0050$.

Pour le plomb II : un premier polissage a donné $\varepsilon_0 = 0{,}126$ et un deuxième polissage $\varepsilon_0 = 0{,}137$ ou $\varepsilon_0^2 = 0{,}0188$.

(Cette différence entre les deux surfaces polies indique vraisemblablement une certaine liquation au cours du refroidissement après coulée.)

Nota. — Pour raison de commodité nous reportons les tableaux de nombres et les graphiques correspondants à la fin de ce travail.

II. — PROCÉDÉS DE MESURE D'AUTRES GRANDEURS QUI SERONT UTILISÉES POUR APPLIQUER LA THÉORIE

Les durées τ de contact par choc ont été mesurées par le procédé n° 3 exposé plus haut à propos de son épreuve sur un métal de dureté très voisine de celle des billes.

Les diamètres d d'empreintes permanentes ont été mesurés à l'aide d'un petit microscope comportant un micromètre oculaire et un objectif de grandissement égal à 10. Les profondeurs h des empreintes ont été calculées ensuite en supposant que les empreintes sur métaux mous sont des calottes sphériques.

III. — THÉORIE DU CHOC VIOLENT D'UN MOBILE TRÈS DUR A BOUT SPHÉRIQUE SUR UNE PLAQUE ÉPAISSE DE MÉTAL MOU

Décomposition du temps de conductibilité en deux périodes.

Si on appelle τ_1 le temps pendant lequel la déformation des surfaces en contact par choc augmente, τ_2 le temps pendant lequel la plaque essayée réagit élastiquement sur le mobile, τ le temps pendant lequel il y a contact électrique on peut dire que $\tau_1 + \tau_2$ est égal à τ ou tout au moins tend vers τ à mesure qu'on considère des chocs où la vitesse v d'arrivée du mobile est de plus en plus grande. Le contraire supposerait en effet que l'épaisseur d'une couche conductrice (franchie avant et après les déformations des métaux) augmenterait indéfiniment avec v. Donc :

$$\text{limite } (\tau_1 + \tau_2) = \text{limite de } \tau.$$

Étude pour un métal mou, de la limite de τ_1.

Nous pouvons dans cette étude négliger le temps pendant lequel, au début de τ_1 la déformation n'est encore qu'entièrement élastique. Ce temps s'écoule en effet alors que le mobile garde à peu près sa vitesse maximum, et il apparaît ainsi n'être qu'une faible partie de τ_1.

Pendant que se fait la déformation permanente, le métal mou est chassé par le mobile de choc et il se forme un bourrelet plus ou moins étalé; son volume est à peu près égal à celui de l'empreinte. Le métal chassé vers les bords est écroui au maximum mais on peut supposer avec Andrews (*loc. cit.*) que dans cette opération rapide il est passé par un état pratiquement aussi homogène que l'état liquide.

Nous avons admis que le métal chassé exerce une pression dont la composante normale p_0 à la surface du mobile est :

1° Constante dans l'aire qui fera partie de l'empreinte permanente;

2° Indépendante de la profondeur déjà atteinte à l'instant t pris dans le temps τ_1;

3° Indépendante du rayon de courbure du mobile.

Le métal chassé agit encore tangentiellement à la surface du mobile. *Nous avons admis* l'existence d'une pression tangentielle t telle que l'action résultante de p_0 et t est en tout point de la surface opposée à la direction d'avancement du mobile.

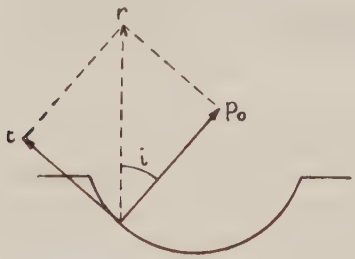


Fig. 15

Fig. 16

Cela donne pour l'action résultante intéressant une portion de surface ds la valeur $p_0\ ds$: cos i; pour l'intégration à étendre à la surface s de l'empreinte, nous avons $p_0\ ds \cos i : \cos i = p_0\ ds$ (*fig.* 15).

Nous admettons encore que la pression subie par les mobiles très durs dont nous nous sommes servi n'a qu'un effet négligeable sur leur forme; la partie intéressée par le choc demeure donc sphérique.

Désignons par S la totalité de la surface de contact à l'instant t et par s la portion de cette surface où se trouve atteinte la pression p_0. La surface s s'oppose à l'avancement du mobile par une force $p_0 s$. La couronne de surface S — s exerce une pression normale qui varie de p_0 au bord de s, à zéro au bord de S, suivant une loi que nous supposerons telle que la pression normale a pour valeur moyenne $2\ p_0 : 3$.

Nous admettons ainsi avec Andrews (*loc. cit.*) qu'une formule de Hertz établie pour un choc purement élastique peut être étendue au cas d'une couronne de déformation élastique.

L'équation du mouvement, pendant le temps τ_1, du mobile de masse M et dont le rayon de la surface sphérique de choc est R, est alors :

$$p_0 s + 2 p_0 (S - s) : 3 = - M \gamma$$

ou :

$$p_0 S [1 - (S - s) : 3 S] = - M \gamma,$$

en désignant l'accélération par γ.

Soient x_1 et x (*fig.* 16) les hauteurs des calottes sphériques de surfaces S et s. On a :

$$S = 2 \pi R x_1 \qquad \text{et} \qquad s = 2 \pi R x;$$

formules valables tant que $x_1 \leqq R$, car au delà l'empreinte aurait une partie cylindrique, d'où :

$$x_1 [1 - (x_1 - x) : 3 x_1] = - \gamma M : 2 \pi R p_0.$$

En première approximation, comptons l'action de $S - s$ de même façon que celle de s. L'équation du mouvement devient simplement :

$$x_1 = - \gamma M : 2 \pi R p_0,$$

c'est-à-dire une équation identique à celle d'un mouvement sinusoïdal qui ne peut évidemment durer ici que 1 : 4 de période avec :

$$T : 4 = \tau_1.$$

On a :

$$\left(\frac{2 \pi}{T}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad \omega^2 = 2 \pi R p_0 : M;$$

d'où :

$$\tau_1^2 = \frac{\pi}{8} \frac{M}{R} \frac{1}{p_0}.$$

Soit h_1 la limite de x_1 atteinte à la fin de τ_1 :

$$x_1 = h_1 \sin \omega t, \qquad v_t = h_1 \omega \cos \omega t.$$

La vitesse moyenne v_m du mobile pendant τ_1 est $v_m = \frac{2}{\pi} v$ avec $v = h_1 \omega$ ou $v^2 = h_1^2 \, 2 \pi p_0 R : M$.

Étude de la limite de τ_2.

Ce temps de réaction élastique n'est pas négligeable car la vitesse du mobile y passe de zéro à v' avec v' très inférieur à v.

Soit h_t la profondeur de l'empreinte à l'instant t pris dans le temps τ_2. A la fin de τ_2 on aura $h_t = h$, profondeur de l'empreinte permanente. Posons $h_t - h = x'$ et $h_1 - h = h_2$, x' variera de h_2 à zéro.

La fluidité du métal de l'empreinte disparaît pratiquement dès le début de τ_2. Par suite de la rigidité du mobile, chaque point de celui-ci au contact du métal en

expérience (par exemple le point I de la *fig.* 17) se déplace parallèlement à l'axe de l'empreinte. Le métal essayé a subi une compression élastique dans la direction I'I et nous pouvons considérer au-dessous de I une sorte de ressort de section $ds \cos i$ comprimé au début de τ_2 par une force $r\, ds \cos i$.

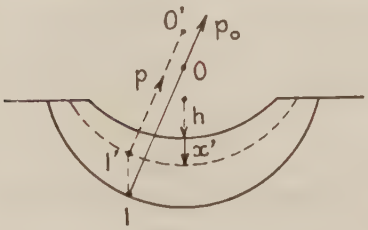


Fig. 17

Pour un point I pris dans la surface s, cette force au début de τ_2 est égale à $\frac{p_0}{\cos i} ds \cos i = p_0 ds$. Elle s'annule à la fin de τ_2. Nous prendrons pour sa valeur à l'instant t l'expression $p_0 ds \frac{x'}{h_2}$. L'intégration étendue à toute la surface s qui sera empreinte permanente donne la force :

$$p_0 \frac{x'}{h_2} 2\pi \mathrm{R}h.$$

Dans la surface S — s on a (voir étude de τ_1) au début de τ_2 une pression normale de valeur moyenne égale aux $\frac{2}{3}$ de p_0. Pendant le temps τ_2 la surface S de profondeur $h_1 = h + h_2$ devient à l'instant t une surface S' de profondeur $h + x'$ donc de valeur $\mathrm{S}' = 2\pi \mathrm{R}\,(h + x')$. Au même instant on a une couronne :

$$\mathrm{S}' - s = 2\pi \mathrm{R}x'.$$

De façon analogue à ce qui a été fait pour τ_1 nous prendrons ici une valeur moyenne de r dans S' — s : les $\frac{2}{3}$ de la valeur de r du bord de s. Il ne s'agit d'ailleurs que de calculer un terme (qui sera petit) à ajouter à la force correspondant à s. Ce terme est ainsi :

$$\frac{2}{3} p_0 \frac{x'}{h_2} 2\pi \mathrm{R}x'.$$

Par suite, l'équation du mouvement devient :

$$p_0 2\pi \frac{\mathrm{R}}{h_2} \left(hx' + \frac{2}{3} x'^2 \right) = - \mathrm{M}\gamma',$$

avec l'accélération γ'.

Le rapport du deuxième terme du premier membre au premier a sa valeur maximum au début de τ_2 et vaut alors $2h_2 : 3h$. Or nous verrons dans la suite de cet exposé que la limite de $\frac{h_2}{h}$ quand on considère des chocs de plus en plus violents, est voisine de ε_0^2; nous écrirons donc qu'en *première approximation* l'équation du mouvement est :

$$p_0 2\pi \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}} \frac{h}{h_2} x' = - \gamma'.$$

Cette équation est identique à celle d'un mouvement sinusoïdal de période T' mais ne durant que $T' : 4 = \tau_2$. Elle donne :

$$\omega'^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{4\tau_2^2} = 2\pi \frac{R}{M} p_0 \frac{h}{h_2},$$

ou :

$$\tau_2^2 = \frac{\pi}{8} \frac{M}{R} \frac{1}{p_0} \frac{h_2}{h},$$

$$x' = h_2 \cos \omega' t \text{ ——— } v' = h_2 \omega' \text{ ——— } v'_{\text{moyen}} = \frac{2}{\pi} v'.$$

Nous pouvons d'ailleurs utiliser l'expression complète de la force pour le calcul de l'énergie cinétique du mobile au moment où x' s'annule :

$$\frac{1}{2} M v'^2 = \int_0^{h_2} \frac{2\pi R p_0}{h_2} \left(h x' + \frac{2}{3} x'^2\right) dx'.$$

On en tire :

$$v'^2 = 2\pi \frac{R}{M} p_0 h_1 h_2 \left(1 - \frac{5}{9} \frac{h_2}{h_1}\right).$$

Nous verrons que ce v' est très sensiblement égal à v' à la fin de τ_2.

Avec l'expression de v^2 trouvée plus haut en première approximation, on obtient en première approximation :

$$\left(\frac{v'}{v}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \varepsilon^2 = h_2 : h_1,$$

et en tirant h_1 de la hauteur approchée de v'^2 :

$$\varepsilon = \frac{h_2}{v'} \sqrt{2\pi \frac{R}{M} p_0}.$$

Notre étude expérimentale de ε^2 relatée plus haut ayant montré que cette quantité tend, lorsque v croît, vers une limite ε_0^2 non nulle dépendant du métal mou essayé, l'égalité ci-dessus $\varepsilon^2 = h_2 : h_1$ indique que, pour des chocs très violents, h_2 est proportionnel à h_1; ainsi l'épaisseur de métal mou qui intervient dans la réaction élastique croît avec la violence du choc. La dernière égalité indique pour ces chocs une proportionnalité de h_2 à v'.

— Reprenons, *pour une approximation plus poussée* dans l'évaluation de τ_1 l'équation :

$$x_1 [1 - (x_1 - x) : 3 x_1] = - \gamma M : 2\pi R p_0.$$

La quantité $(x_1 - x) : 3 x_1$ d'abord égale à 1 : 3 au début de τ_1 est à la fin égale à $h_2 : 3 h_1$ et nous venons de voir que ce rapport tend, lorsque v croît, vers une valeur voisine de $\varepsilon_0^2 : 3$.

Comme nous ne faisons que la théorie des chocs violents, qui le sont d'ailleurs pour v d'autant moins grand que M : R l'est davantage, nous écrirons, en seconde approxi-

mation, l'équation ci-dessous :

$$x_1 (1 - \varepsilon^2 : 3) = - \gamma M : 2 \pi R p_0.$$

Le mouvement correspondant à cette équation ne diffère de celui prévu en première approximation que par de nouvelles valeurs ω et τ_1. On a :

$$\omega^2 = 2 \pi \frac{R}{M} p_0 (1 - \varepsilon^2 : 3),$$

donc :

$$\boxed{\tau_1^2 = \frac{\pi}{8 p_0} \frac{M}{R} \frac{3}{3 - \varepsilon^2}}.$$

Cherchons aussi à *mieux connaître* τ_2.

L'équation complète :

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{2 \pi R p_0}{h_2} \left(h x' + \frac{2}{3} x'^2 \right) = 0,$$

peut s'écrire :

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} + r x' + s x'^2 = 0,$$

avec :

$$r = 2 \pi R p_0 \frac{h}{h_2} \qquad \text{et} \qquad s = \frac{4 \pi R p_0}{3 h_2}.$$

Le troisième terme restant petit devant la deuxième, notre équation est du type connu (voir en particulier « Acoustique » de Foch, p. 28, collection Colin) pour admettre, en seconde approximation une solution d'écriture :

$$x' = a \cos \omega' t - \frac{a^2}{3 h} + \frac{a^2}{9 h} \cos 2 \omega' t,$$

ou :

$$x' = a \cos \omega' t - \frac{4 a^2}{9 h} + \frac{2 a^2}{9 h} \cos^2 \omega' t.$$

Comportant :

$$\omega'^2 = 2 \pi \frac{R}{M} p_0 \frac{h}{h_2}.$$

Comparaison de a à h_2 :

$$v' = - a \omega' \sin \omega' t - \frac{2 a^2 \omega'}{9 h} \sin 2 \omega' t,$$

est nul pour $t = 0$, et alors :

$$h_2 \qquad \text{ou} \qquad x'_{max} = a - \frac{a^2}{3 h} + \frac{a_2}{9 h} \qquad \text{soit : } a \left(1 - \frac{2 a}{9 h} \right),$$

d'où la première approximation, $h_2 = a$,
et en seconde :

$$h_2 = a \left(1 - \frac{2 h_2}{9 h} \right) \qquad \text{ou} \qquad a = h_2 \left(1 + \frac{2 h_2}{9 h} \right).$$

Avec :

$$\frac{h_2}{h} = \frac{h_2}{h_1 - h_2} \# \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2},$$

on arrive à :

$$a = h_2 \left(1 + \frac{2}{9} \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right).$$

Espace parcouru pendant τ_2, c'est-à-dire pendant que le contact subsiste. Le temps τ_2 commence à $t = 0$ et cesse au moment où la vitesse v' atteint sa valeur maximum, donc quand l'accélération s'annule :

$$\gamma' = - a \omega'^2 \cos \omega' t - \frac{4 \omega'^2 a^2}{9 h} \cos 2 \omega' t,$$

ou en tenant compte de l'égalité :

$$\cos 2 \omega' t = 2 \cos^2 \omega' t - 1,$$

$$\gamma' = - a \omega'^2 \left(\cos \omega' t + \frac{8}{9} \frac{a}{h} \cos^2 \omega' t - \frac{4}{9} \frac{a}{h}\right),$$

on a : $\gamma' = 0$ pour $t = \tau_2$, ce qui donne :

$$\cos \omega' \tau_2 \left(1 + \frac{8}{9} \frac{a}{h} \cos \omega' \tau_2\right) = \frac{4}{9} \frac{a}{h}.$$

En première approximation $\cos \omega' \tau_2 = 4 a : 9 h$,
et en seconde :

$$\cos \omega' \tau_2 \left(1 + \frac{8}{9} \frac{a}{h} \frac{4}{9} \frac{a}{h}\right) = \frac{4}{9} \frac{a}{h},$$

ou :

$$\cos \omega' \tau_2 = \frac{4}{9} \frac{a}{h} \left(1 - \frac{32}{81} \frac{a^2}{h^2}\right).$$

On trouve alors qu'à la fin de τ_2, la valeur de x' est :

$$x'_1 = - a \frac{96}{729} \frac{a^3}{h^3}.$$

Cette quantité étant tout à fait négligeable devant a, la distance parcourue pendant τ_2 est égale à h_2.

Relation entre h_2 *et le maximum de* v'.

Le maximum de v', c'est-à-dire la valeur mesurable de v', s'obtient en écrivant :

$$\sin^2 \omega' \tau_2 = 1 - \cos^2 \omega' \tau_2,$$

d'où :

$$\sin \omega' \tau_2 \# 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \omega' \tau_2 \qquad \text{ou} \qquad 1 - \frac{8}{81} \frac{a^2}{h^2},$$

donc $\sin 2 \omega' \tau_2 \# 0$.

L'expression de v' à l'instant t, écrite plus haut, donne :

$$v'_{\max} = a \omega' \left[1 - \frac{8}{81} \left(\frac{a}{h}\right)^2\right] \# a \omega',$$

ou :

$$\omega' h_2 \left(1 + \frac{2}{9}\frac{h_2}{h}\right).$$

Pour calculer τ_2, on peut s'en tenir à $\cos \omega' \tau_2 = 4\,a : 9\,h$, et écrire :

$$\cos \omega' \tau_2 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \omega' \tau_2\right) \# \frac{\pi}{2} - \omega' \tau_2,$$

$$4\,a : 9\,h = \frac{\pi}{2} - \omega' \tau_2 :$$

$$\tau_2 = \frac{\pi}{2\,\omega'}\left(1 - \frac{8}{9\,\pi}\frac{a}{h}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pi}{2\,\omega'}\left(1 - \frac{8}{9}\frac{h_2}{h}\right),$$

et avec $\omega' = \sqrt{2\,\pi\,p_0 \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}\frac{h}{h_2}}$,

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8\,p_0}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}\frac{h_2}{h}}\left(1 - 0{,}28\,\frac{h_2}{h}\right).$$

La valeur moyenne de v' *pendant* τ_2, peut être calculée maintenant :

$$\tau_2\, v'_{\text{moyen}} = h_2.$$

On trouve :

$$v'_{\text{moyen}} = \frac{2\,h_2}{\pi}\,\omega'\left(1 + 0{,}28\,\frac{h_2}{h}\right),$$

d'où :

$$v'_{\text{moyen}} = \frac{2}{\pi}\left(1 + 0{,}06\,\frac{h_2}{h}\right) v'_{\max}.$$

Relation entre h_2 *et* h_1 :

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 = \left[\frac{h_2\,\omega'\left(1 + 0{,}22\,\frac{h_2}{h}\right)}{h_1\,\omega}\right]^2,$$

mais :

$$\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 = \frac{h}{h_2}\,(1 + 0{,}33\,\varepsilon^2) \qquad \text{ou} \qquad \frac{h_1 - h_2}{h_2}\,(1 + 0{,}33\,\varepsilon^2),$$

ou :

$$\frac{h_1}{h_2}\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)(1 + 0{,}33\,\varepsilon^2),$$

$$\frac{h_2}{h} = \frac{h_2}{h_1 - h_2} = \frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right),$$

d'où :

$$\varepsilon^2 = \frac{h_2}{h_1}\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)(1 + 0{,}33\,\varepsilon^2)\left[1 + 0{,}44\,\frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)\right].$$

Remplaçons dans les facteurs où $\frac{h_2}{h_1}$ est additionné à 1 ou soustrait à 1, ce terme par sa valeur approchée ε^2, il vient :

$$\varepsilon^2 = \frac{h_2}{h_1}\,(1 - \varepsilon^2)\,(1 + 0{,}33\,\varepsilon^2)\,(1 + 0{,}44\,\varepsilon^2),$$

ou :

$$\varepsilon^2 = \frac{h_2}{h_1}(1 - 0{,}23\ \varepsilon^2).$$

On a ainsi :

$$\frac{h_2}{h_1} = \varepsilon^2 (1 + 0{,}23\ \varepsilon^2).$$

Relation entre τ et τ_1.

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\frac{h_2}{h} = \varepsilon^2 (1 + 0{,}23\ \varepsilon^2)\,[1 + \varepsilon^2 (1 + 0{,}23\ \varepsilon^2)],$$

ou :

$$\frac{h_2}{h} = \varepsilon^2 (1 + 1{,}23\ \varepsilon^2),$$

$$\tau_2{}^2 = \frac{\pi}{8\,p_0}\frac{M}{R}\,\varepsilon^2 (1 + 1{,}23\ \varepsilon^2)\,[1 - 0{,}56\ \varepsilon^2 (1 + 1{,}23\ \varepsilon^2)],$$

ou :

$$\tau_2{}^2 = \frac{\pi}{8\,p_0}\frac{M}{R}\,\varepsilon^2 (1 + 0{,}67\ \varepsilon^2).$$

Nous savons que :

$$\tau_1{}^2 = \frac{\pi}{8\,p_0}\frac{M}{R}(1 + 0{,}33\ \varepsilon^2),$$

donc :

$$\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2 = \varepsilon^2 (1 + 0{,}34\ \varepsilon^2),$$

$$\tau = \tau_1\,[1 + \varepsilon\,(1 + 0{,}17\ \varepsilon^2)] \# \tau_1 (1 + \varepsilon).$$

Rappelons qu'il s'agit de formules valables pour des chocs très violents; rappelons également, pour justifier nos approximations, que, pour le moins mou des quatre métaux expérimentés, le plomb I, ε^2 est à peine égal à 0,08.

Pour ce plomb I, on trouve :

$$v'_{\text{moyen}} = \frac{2}{\pi}\,v'\,(1 + 0{,}0052) \qquad \text{donc :} \qquad \# \frac{2}{\pi}\,v'.$$

Ce qui justifie les calculs ci-après.

IV. — APPLICATION DE LA THÉORIE A LA CONNAISSANCE DE p_0

1° Nous avons d'abord tiré parti d'une expression de τ_1 ne contenant pas p_0.

Les égalités :

$$\tau = \tau_1 (1 + \varepsilon), \qquad h_1 = \frac{2}{\pi}\,v\,\tau_1, \qquad h_2 = \frac{2}{\pi}\,v'\,\tau_2,$$

donnent :

$$h = \frac{2}{\pi}\,v\,(\tau_1 - \varepsilon\,\tau_2),$$

ou :

$$h = \frac{2}{\pi}\,v\,[\tau_1 (1 + \varepsilon) - \varepsilon\,\tau],$$

donc

$$\tau_1 = \frac{\pi h}{2 v (1 + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon \tau}{1 + \varepsilon} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pi h + 2 v' \tau}{2 (v + v')}.$$

Il s'agit de la limite de τ_1 que nous avons vue proportionnelle à $\sqrt{\frac{M}{R}}$. Pour connaître $\left| \tau_1 \sqrt{\frac{R}{M}} \right|_{\text{lim}}$ à partir de nos mesures nous avons été conduit à calculer pour chaque série de chocs réellement effectués la quantité :

$$z = \sqrt{\frac{R}{M}} \frac{\pi h + 2 v' \tau}{2 (v + v')},$$

et à chercher à l'aide de graphiques, la limite de z lorsque v croît, limite qui coïncide avec celle de $\tau_1 \sqrt{\frac{R}{M}}$.

Pour les raisons déjà exposées à propos de la détermination de ε_0, nous avons obtenu z limite relatif à chaque métal mou en choisissant des coordonnées telles que l'ensemble des points relatifs aux divers mobiles utilisés détermine une droite. Nous allons expliquer la méthode employée sur l'exemple de l'étain.

Les coordonnées z et ε donnent avec ce métal des graphiques de faible courbure dont deux sur trois sont confondus. Essayant en ordonnées une puissance peu élevée de z, nous trouvons avec z^4 et ε que les courbes précédentes deviennent à peu près droites concourantes en un point d'abscisse ε_0. Conservant z^4 en ordonnées, nous nous proposons de déterminer x et y tels que la quantité $(\varepsilon - \varepsilon_0) M^x R^y$ portée en abscisses donne des droites confondues. Pour cela, nous observons que le graphique tracé avec z^4 et ε donne lieu, pour $10^{20} z^4 = 4$ à la différence $\varepsilon - \varepsilon_0 = 0{,}080$ pour la bille ($M = 44{,}66 - R = 1{,}111$) et le mobile ($M = 50{,}79 - R = 0{,}445$), ainsi que $\varepsilon - \varepsilon_0 = 0{,}106$ pour la bille ($M = 5{,}59 - R = 0{,}5555$). Nous écrivons alors :

$$44{,}66^x \,.\, 1{,}111^y = 50{,}79^x \,.\, 0{,}445^y,$$

et :

$$80 \,.\, 44{,}66^x \,.\, 1{,}111^y = 106 \,.\, 5{,}59^x \,.\, 0{,}5555^y.$$

La résolution de ces équations donne :

$$x \neq \frac{1}{8} \qquad \text{et} \qquad y \neq 0.$$

Les coordonnées cherchées sont donc z^4 et $(\varepsilon - \varepsilon_0) M^{\frac{1}{8}}$.

Dans le cas du cuivre, métal qui a été essayé avec quatre mobiles, il a encore suffi de deux inconnues x et y car les trois équations écrites ont été trouvées compatibles.

C'est ainsi que de très bons ou d'excellents résultats ont été atteints en prenant pour l'étain les coordonnées z^4 et $(\varepsilon - \varepsilon_0) M^{\frac{1}{8}}$ (une droite).

Pour le plomb I, les coordonnées z et ε (une droite).

Pour le cuivre recuit, z^2 et $\frac{R}{v'\sqrt{M}}$ ou z et $\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\frac{1}{R^3}}$ (une droite).

Pour le plomb II, z et ε ou $\frac{1}{v'\sqrt{M}}$ (une droite).

Voici les résultats en unités C. G. S. :

	Étain	Plomb I	Cuivre recuit	Plomb II
$10^4\,\tau_1\sqrt{\frac{R}{M}} =$	$0{,}1078 \pm 1{,}5\,\%$	$0{,}171 \pm 1\,\%$	$0{,}1116 \pm 3\,\%$	$0{,}2175 \pm 1\,\%$

De la formule :

$$\tau_1^2 = \frac{\pi}{8}\frac{M}{p_0 R}(1 + 0{,}33\ \varepsilon_0^2),$$

nous tirons :

$$p_0 = \frac{\pi}{8}\frac{M}{R\,\tau_1^2}(1 + 0{,}33\ \varepsilon_0^2),$$

d'où les valeurs de p_0 en kg/mm² (soit $9{,}81 \cdot 10^7$ baryes) :

	Étain	Plomb I	Cuivre recuit	Plomb II
p_0 kg/mm² =	$34{,}95 \pm 3\,\%$	$14{,}05 \pm 2\,\%$	$32{,}9 \pm 6\,\%$	$8{,}50 \pm 2\,\%$

(Voir les graphiques et leurs tableaux de nombres en annexe). Ces tableaux montrent l'importance relative de πh et de $2\,v'\,\tau$.

2° La connaissance de la limite de $\tau\sqrt{\frac{R}{M}}$ par un graphique ayant en ordonnées une puissance convenable de cette quantité permet d'atteindre p_0 sans calcul des profondeurs h, donc sans avoir à mesurer les diamètres d'empreintes permanentes.

Nous avons obtenu un bon résultat :

pour l'étain avec les coordonnées..... $\left(\tau\sqrt{\frac{R}{M}}\right)^4$ et $\frac{1}{v'}\sqrt{\frac{R^3}{M}}$,

pour le plomb I..... — et $\frac{R^2}{v'\sqrt{M}}$,

pour le cuivre recuit..... — et $\frac{1}{v'}\sqrt{\frac{R^3}{M}}$,

pour le plomb II..... — et $\frac{R}{\sqrt{Mv}}$.

L'accord avec les valeurs données ci-dessus pour $10^4\,\tau_1\sqrt{\frac{R}{M}}$ est très satisfaisant sauf pour le cuivre recuit qui nous a donné un nombre trop petit de 7,7 %; mais ce métal a été le premier que nous ayons essayé et nous ne connaissions pas alors la règle d'après laquelle les centres des empreintes doivent être distants d'au moins cinq fois les diamètres correspondants. Nos métaux ont été expérimentés dans l'ordre : Cuivre, Plomb I, Acier à billes, Étain, Plomb II.

3° Pour atteindre p_0 à l'aide de graphiques ne nécessitant pas les mesures de τ, nous avons cherché une *expression* de p_0 *ne contenant pas* τ_1.

En remplaçant τ par $\tau_1 (1 + \varepsilon)$ dans :

$$\tau_1 = \frac{\pi h}{2 v (1 + \varepsilon)} + \frac{\tau \varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

on obtient

$$\tau_1 = \frac{\pi h}{2 v (1 - \varepsilon^2)},$$

qui, associé à :

$$\tau_1^2 = \frac{\pi}{8 p_0} \frac{M}{R} (1 + 0{,}33\ \varepsilon^2),$$

donne :

$$p_0 = \frac{M v^2}{2 \pi R h^2} (1 - 1{,}66\ \varepsilon^2),$$

ou, en introduisant les hauteurs de chute H et de rebondissement H′ :

$$p_0 = \frac{M g\ (H - 1{,}66\ H')}{\pi R h^2}$$

De même que précédemment, nous avons cherché à utiliser nos mesures pour atteindre p_0 à l'aide de graphiques suggérés par cette dernière formule. N'oubliant pas cette fois encore que notre théorie est celle d'un choc très violent, nous avons posé :

$$y = \frac{M g\ (H - 1{,}66\ H')}{\pi R h^2},$$

et connu p_0 comme limite vers laquelle tendent, lorsque v croît, les valeurs de y calculées avec les résultats des chocs réellement pratiqués.

Nous avons obtenu d'excellents résultats dans l'obtention d'une droite pour chaque métal en prenant pour coordonnées avec l'étain $\frac{1}{y^2}$ et $\frac{R}{v M^6}$, avec le plomb I et le cuivre $\frac{1}{y^2}$ et $\frac{R}{v \sqrt{M}}$, avec le plomb II y et $(\varepsilon - \varepsilon_0)\ M^{0,16}$.

De la valeur de l'ordonnée à l'origine nous avons tiré :

	Étain	Plomb I	Cuivre recuit	Plomb II
p_0 kg/mm² =	$34 \pm 2\ \%$	$14{,}85 \pm 3\ \%$	$31{,}5 \pm 3\ \%$	$8{,}72 \pm 1\ \%$.

Les diverses droites relatives au cuivre et au plomb I sont confondues, pour l'étain deux sur trois. La précision sur l'ordonnée à l'origine, commune aux diverses droites relatives aux mobiles qui ont servi pour un même métal, est comparable à celle obtenue plus haut $\left(\text{par la détermination de la limite de } \tau_1 \sqrt{\frac{R}{M}}\right)$. Les différences avec ces premiers nombres sont, dans l'ordre indiqué, soit :

$$-1 \qquad +0{,}8 \qquad -1{,}4 \qquad +0{,}22 \text{ kg/mm}^2,$$

ou :

$$-3\ \% \qquad +5{,}3\ \% \qquad -4{,}4\ \% \qquad +2{,}5\ \%.$$

On voit que l'accord est aussi satisfaisant que possible.

V — JUSTIFICATION *A POSTERIORI* DES HYPOTHÈSES QUI ONT SERVI DE BASE A LA THÉORIE

L'expression :

$$p_0 = \left| \frac{Mg\,(H - 1{,}66\,H')}{\pi R h^2} \right|_{\text{limite}},$$

peut s'expliquer de la manière suivante : soit θ le temps (partie de τ_1) au bout duquel la profondeur atteinte n'est encore que $h = h_1 - h_2$. D'après nos hypothèses, la pression dans la surface s est constamment p_0 pendant le temps $\tau_1 - \theta$; au retour pendant le temps τ_2 elle décroît de p_0 à zéro avec une valeur moyenne qui, pour le calcul d'un travail, est $\frac{p_0}{2}$.

Si donc on néglige l'action de la couronne S — s, le travail pendant $\tau_1 - \theta$ est double de l'énergie récupérée pendant τ_2, c'est-à-dire vaut $2\,Mg\,H'$. Et le travail pendant le temps θ a pour expression $Mg\,H - 2\,Mg\,H'$. Comme d'autre part (toujours en négligeant S — s), il correspond à une force $p_0 s$ ou $p_0\,2\,\pi R h_t$ de valeur moyenne $p_0\,\pi R h$, il vaut encore $p_0\,\pi R h^2$. On arrive ainsi à :

$$p_0\,\pi R h^2 = Mg\,(H - 2\,H').$$

Pour tenir compte de l'action de la couronne S — s où la déformation est purement élastique, il faut remarquer que les travaux correspondant à cette couronne pendant les temps $\tau_1 - \theta$ et τ_2 sont égaux. Le travail à déduire de $Mg\,H$ est finalement inférieur à $2\,Mg\,H'$, notre théorie précise qu'il vaut $1{,}66\,Mg\,H'$. Nous n'avons pu tenir compte de l'énergie potentielle emmagasinée par l'écrouissage et dont on sait, voir E. Brun (4), qu'elle est faible et récupérable lors d'un recuit.

Comme le volume de l'empreinte, calotte sphérique de profondeur h, est :

$$V = \pi R h^2 \left(1 - \frac{h}{3R}\right) \# \pi R h^2,$$

on voit que p_0 est le quotient du travail fait dans un choc violent pendant que le métal « coule » par le volume du métal évacué. Il se présente donc comme une quantité proche de celle qui se déduit du travail d'Edwards et Austin (voir première partie, p. 7), mais si notre p_0 ne vaut que pour les métaux mous, il a l'avantage de s'appuyer sur une base théorique ainsi que sur des expériences très variées.

VI. — CONCLUSION

Les quantités ε_0 et p_0 caractérisant un métal mou peuvent être obtenues à l'aide d'essais pratiqués avec un mobile quelconque très dur et à bout sphérique. Toutefois les graphiques montrent que, si l'on n'utilise qu'un seul mobile, il y a grand intérêt, pour extrapoler, à choisir un mobile tel que le rapport de la masse au rayon de courbure de l'extrémité soit aussi grand que possible.

L'emploi d'un pendule balistique permettant d'atteindre très rapidement ε_0 et p_0, nous serions heureux de voir ces nouveaux nombres de dureté rendre des services aux utilisateurs de métaux mous.

ANNEXE

TABLEAUX DE RÉSULTATS ET GRAPHIQUES

Observation préliminaire sur le calcul des temps τ de contact. — La formule empirique (1) du procédé n° 3 (voir troisième partie), sous sa forme $\frac{E}{Q} = \frac{1}{\tau}(r + \rho)$ suggère des graphiques où $\frac{E}{Q}$ est porté en ordonnées et r en abscisses, mais la quantité ρ à laquelle nous nous sommes intéressé longtemps n'est obtenue ainsi qu'avec peu de précision. Nous avons donc toujours utilisé la formule :

$$\frac{Q}{E} = \frac{1}{\rho}\left(\tau - r\frac{Q}{E}\right),$$

équivalente à la formule (1) et construit des graphiques ayant $\frac{Q}{E}$ en ordonnées et $r\frac{Q}{E}$ en abscisses. τ est alors connu par le point de rencontre d'une droite avec l'axe des abscisses.

I. — MÉTAL TRÈS DUR

Exemple de tableau de mesures de τ.

Il s'agit des chocs, sur la plaque de *métal identique à celui des mobiles* et de dureté peu inférieure, du mobile (M = 76 g, R = 1,905 cm). (Ce mobile de section carrée terminé par deux calottes sphériques fut extrait d'une bille par usure à la meule sous un filet d'eau.)

Chaque valeur de $\frac{Q}{E}$ est ici la moyenne d'au moins quatre nombres voisins. Notation : $\frac{Q}{E}$ est un nombre de coulombs par volt, r résistance du balistique et du rhéostat (*fig.* 18).

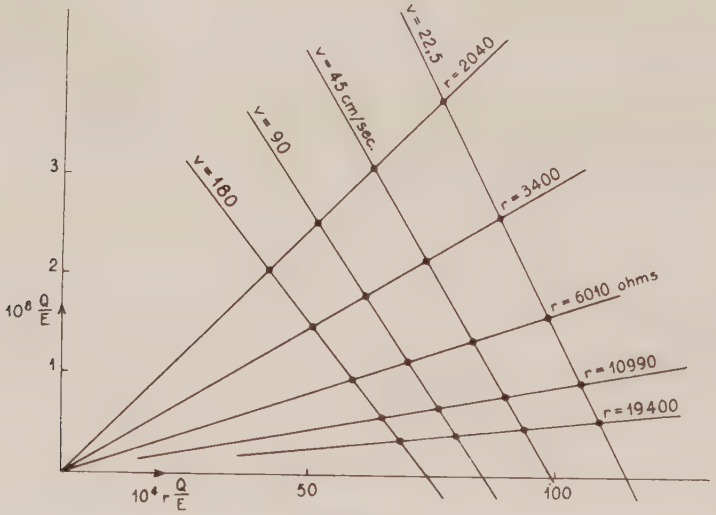


Fig. 18

v cm/sec = 22,5			45		90		180	
r ohms	$10^6 \frac{Q}{E}$	$10^6 r \frac{Q}{E}$	$10^6 \frac{Q}{E}$	$10^6 r \frac{Q}{E}$	$10^6 \frac{Q}{E}$	$10^6 r \frac{Q}{E}$	$10^6 \frac{Q}{E}$	$10^6 r \frac{Q}{E}$
2 040	3,766	76,8	3,09	63,05	2,54	51,8	2,05	41,8
3 400	2,612	88,8	2,17	73,8	1,82	62,0	1,51	51,3
6 010	1,636	98,3	1,38	83,06	1,17	70,5	0,983	59,0
10 990	0,941	103,4	0,812	89,2	0,689	75,7	0,589	64,7
19 400	0,561	108,9	0,479	93,0	0,413	80,1	0,354	68,8
d'où $10^4 \tau$ s =	1,137		0,987		0,852		0,739	
ρ ohms =	971,6		1 149		1 302		1 541	

Tableau des valeurs de τ relatives aux chocs sur *plaque de métal très dur* à l'aide de mobiles très divers, et montrant à quel point nous avons pu vérifier la formule de Hertz sur le choc élastique. Les résultats du tableau précédent y sont reproduits.

v cm/s	22,5	30	45	90	135	180	
Bille de M = 44,66 *g* et R = 1,111 cm :							
$10^4\,\tau$	1,040	0,9685	0,8871	0,7667	0,7062	0,6686	s
$\varepsilon = \frac{v'}{v}$	$\geqq$ 0,98	$\geqq$ 0,98	$\geqq$ 0,98	$\geqq$ 0,967	0,962	0,942	
$10^4\,\tau\left(\frac{Rv}{M^2}\right)^{\frac{1}{5}}$	0,4331	0,4272	0,4244	0,4214	0,4209	0,4221	C. G. S.
Mobile de M = 44,72 *g* et R = 3,010 cm :							
$10^4\,\tau$	0,8710		0,7630	0,6701		0,5908	
ε..... différences peu sûres avec la bille ci-dessus.							
$10^4\,\tau\left(\frac{Rv}{M^2}\right)^{\frac{1}{5}}$	0,4425		0,4453	0,4492		0,4550	
Mobile de M = 50,38 *g* et R = 0,445 cm :							
$10^4\,\tau$	1,315		1,137	0,9940		0,8681	
ε	0,96		0,959	0,933		0,908	
$10^4\,\tau\left(\frac{Rv}{M^2}\right)^{\frac{1}{5}}$	0,4346		0,4317	0,4335		0,4349	
Mobile de M = 76 *g* et R = 1,905 :							
$10^4\,\tau$	1,137		0,9868	0,8518		0,7394	
ε				0,959		0,931	
$10^4\,\tau\left(\frac{Rv}{M^2}\right)^{\frac{1}{5}}$	0,4265		0,4252	0,4216		0,4204	
Mobile de M = 27,415 *g* et R = 1,905 cm :							
$10^4\,\tau$	0,7849		0,6754	0,5880		0,5126	s
ε..... toujours très voisin de 1.							
$10^4\,\tau\left(\frac{Rv}{M^2}\right)^{\frac{1}{5}}$	0,4426		0,4375	0,4375		0,4381	C. G. S.
Bille de M = 5,59 et R = 0,5555 cm :							
$10^4\,\tau$	0,5403					0,3555	
ε	0,99					0,969	
$10^4\,\tau\left(\frac{Rv}{M^2}\right)^{\frac{1}{5}}$	0,4498					0,4486	

Or, la transposition au cas sphère et plan du calcul reproduit par Bouasse [9] pour les chocs élastiques entre deux sphères identiques, nous a conduit à :

$$\tau = 2{,}9432 \left(\frac{15}{8}\right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{M^2}{e^2 R v}\right)^{\frac{1}{5}}; \qquad \text{soit :} \qquad 3{,}7846 \left(\frac{M^2}{e^2 R v}\right)^{\frac{1}{5}},$$

formule comportant la quantité e introduite par Hertz $\left(e = \frac{E}{1 - \sigma^2}\right.$ avec E module d'Young et σ coefficient de Poisson).

Avec $E = 21\,000$ kg/mm² et $\sigma = 0{,}3$ (valeurs indiquées par la Compagnie d'Applications mécaniques, roulements S K F qui nous a directement fourni la plaque d'acier à billes et divers mobiles), nous avons :

$$e = \frac{E}{1 - \sigma^2} = 2.264 \,.\, 10^9 \text{ dynes/cm}^2,$$

et nous arrivons dans le système C. G. S. à :

$$\tau = 0{,}4326 \,.\, 10^{-4} \left(\frac{M^2}{Rv}\right)^{\frac{1}{5}} \text{s},$$

alors que la moyenne des 24 coefficients figurant dans le tableau ci-dessus est 0,4343.

La précision de cet accord de l'expérience avec la théorie suppose que nous avons bien fait, dans notre façon de mesurer la constante du galvanomètre balistique, d'attribuer à un certain condensateur la capacité marquée par le constructeur. Dans l'hypothèse où cette capacité serait erronée de x %, notre moyenne 0,4343 serait affectée d'une erreur égale. Le nombre x ne pouvant être que petit, nous estimons avoir obtenu une remarquable vérification de la formule de Hertz. En tout état de cause, nous avons retrouvé, autant qu'on pouvait l'espérer, la proportionnalité de τ à $\left(\frac{M^2}{Rv}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Les valeurs de ε notées dans le tableau sont toujours voisines de l'unité. Cependant les plus forts chocs ont donné des empreintes visibles sous certaines incidences quoique toujours petites et à bords sans netteté donc de diamètres non mesurables. Comme Schneebeli (cité par Bouasse sans autre référence), l'avait déjà constaté pour le diamètre maximum du cercle de contact pendant le choc entre deux sphères identiques, les formules de Hertz pour le choc élastique restent valables quelque peu en dehors de la limite d'élasticité.

II. — MÉTAUX MOUS

Rappels : 1° Lorsque v (vitesse d'approche) croît, la quantité $z = \sqrt{\frac{R}{M}} \frac{\pi h + 2 v' \tau}{2 (v + v')}$ tend vers une limite qui est aussi celle de $\tau_1 \sqrt{\frac{R}{M}}$. Cette limite sert au calcul de p_0 par la première méthode.

2° De même la quantité :

$$y = \frac{Mg\,(H - 1{,}66\ H')}{\pi R h^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Mv^2\,(1 - 1{,}66\ \varepsilon^2)}{2\,\pi R h^2},$$

tend vers une limite égale à p_0.

Étain.

Tableau pour le graphique donnant τ et ρ relatifs au mobile de M = 50,79 g et R = 0,445 cm (*fig.* 19).

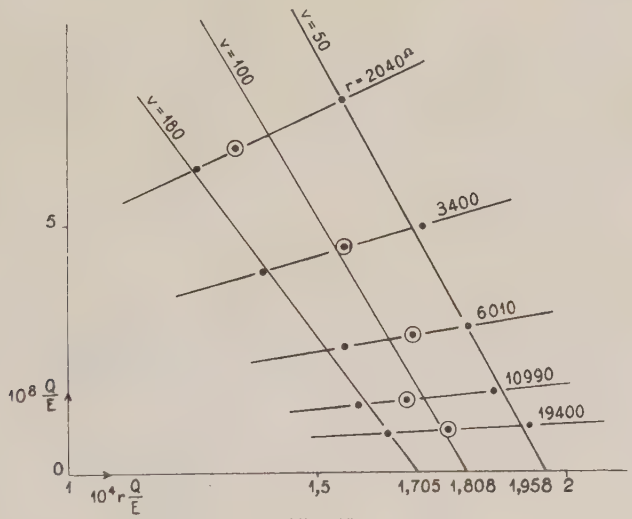


Fig. 19

v cm/s	2e POLISSAGE 50		1er ET 2e POLISSAGES 100		2e POLISSAGE 180	
r Å	$10^8 \frac{Q}{E}$	$10^4 r \frac{Q}{E}$	$10^8 \frac{Q}{E}$	$10^4 r \frac{Q}{E}$	$10^8 \frac{Q}{E}$	$10^4 r \frac{Q}{E}$
2 040	7,533	1,537	6,567	1,378	6,154	1,256
3 400	5,031	1,711	4,559	1,550	4,097	1,393
6 010	2,994	1,799	2,815	1,692	2,583	1,552
10 990	1,688	1,855	1,528	1,681	1,435	1,577
19 400	0,994	1,928	0,908	1,763	0,843	1,635
$10^4 \tau$ s	1,958		1,808		1,705	
ρ ohms	544		592		742	

Étain. — Tableau des quantités mesurées et de quelques autres qui s'en déduisent. Le tout en C. G. S.

1er ou 2e POLISSAGE	CHUTES	v	v'	$10^3\,d$	$10^8\,\tau$	$10^4\,\varepsilon$	$10^6\,h$	$10^6\,\varepsilon\,h$	$10^6\,2\,v'\,\varepsilon$	$10^3\,z$	$\frac{10^{-6}}{y^2}$
					Bille de M = 5,59 g et R = 0,5555 cm :						
1er	au pendule	50	20,70	77,4	7 048	4 141	1 350	4 241	2 918	1 596	40,62
		100	36,62	105	6 618	3 662	2 486	7 810	4 847	1 460	25,07
		182,8	59,41	140	6 320	3 250	4 428	13 911	7 509	1 394	19,77
	verticales	182,8	60,94	140		3 334	4 428				20,22
		332,06	96,86	182		2 917	7 504				13,81
		618,6	159,3	242,6		2 575	13 404				10,86
					Bille de M = 44,66 g et R = 1,111 cm :						
2e	au pendule	45	17,63	148,5	14 310	3 920	2 484	7 803,7	5 045,6	1 618	40,96
2e		90	30,43	205,7	13 100	3 380	4 770	14 985	7 972	1 503	29,42
1er		176,6	54,34	280,7	12 356	3 077	8 900	27 960	13 428	1 413	22,22
1er	verticale	176,6	53,15	280		3 010	8 856				21,43
					Mobile de M = 50,79 g et R = 0,445 cm :						
2e	au pendule	50	16,72	125,7	19 580	3 344	4 450	13 980	6 547	1 440	28,72
1er et 2e		100	27,91	170	18 080	2 790	8 272	25 990	10 090	1 320	18,09
2e		180	47,04	221,5	17 050	2 613	14 000	43 980	16 040	1 237	14,12

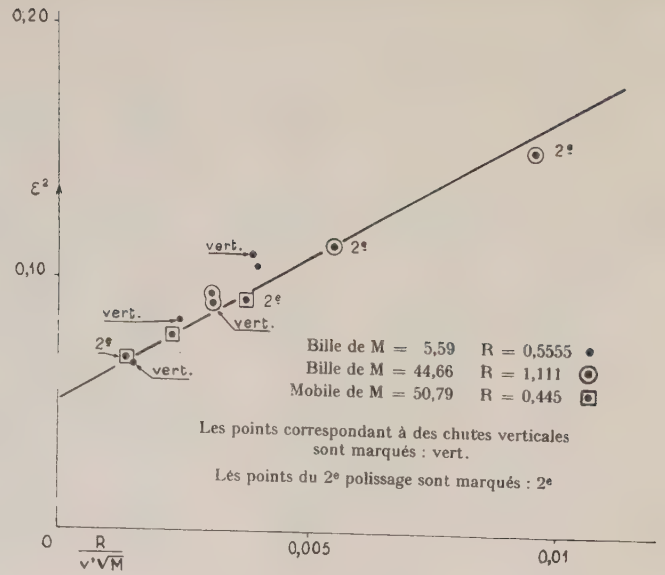


Fig. 20

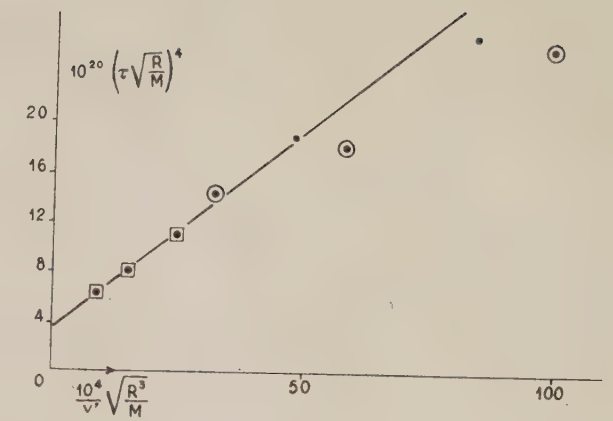


Fig. 21

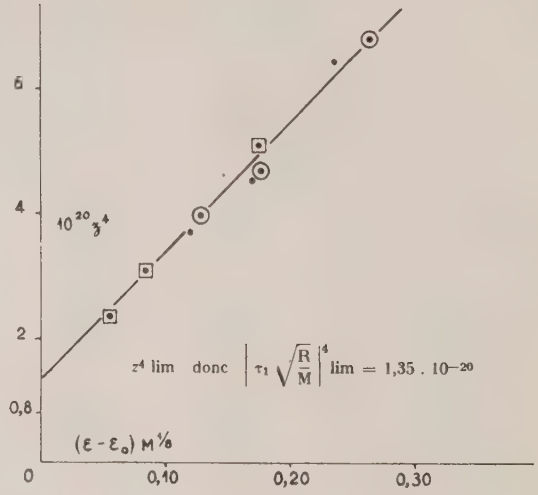


Fig. 22

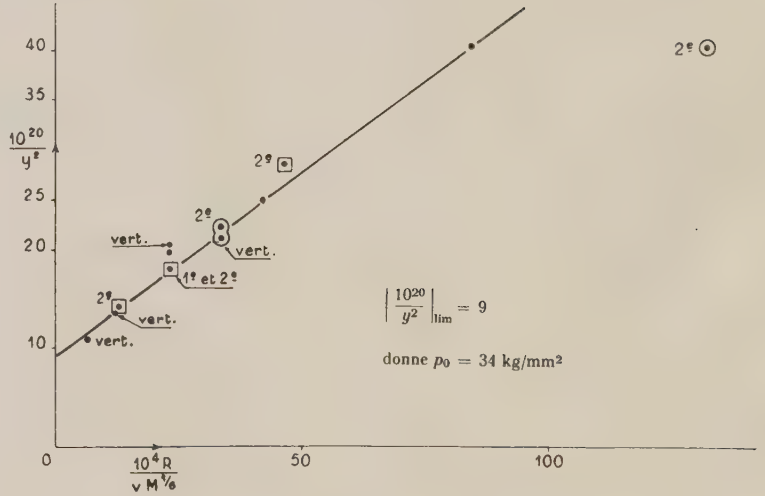


Fig. 23

Plomb I.

Tableau pour le graphique donnant τ et ρ relatifs à la bille M = 94,92 *g* et R = 1,430 cm (*fig.* 24).

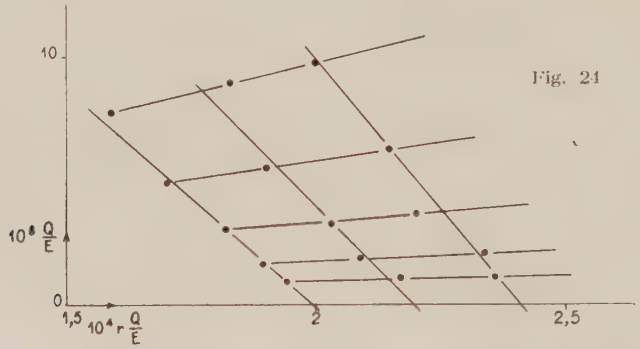


Fig. 24

v cm/sec	31,32		62,64		140,07	
r^Ω	$10^8 \frac{Q}{E}$	$10^4 r \frac{Q}{E}$	$10^8 \frac{Q}{E}$	$10^4 r \frac{Q}{E}$	$10^8 \frac{Q}{E}$	$10^4 r \frac{Q}{E}$
2 040	9,760	1,991	8,970	1,830	7,796	1,590
3 400	6,314	2,147	5,595	1,902	5,004	1,701
6 010	3,668	2,205	3,386	2,035	3,023	1,817
10 990	2,128	2,340	1,902	2,090	1,738	1,910
19 400	1,217	2,361	1,117	2,167	1,000	1,941
$10^4 \tau$	2,412		2,205		1,995	
ρ^Ω	426		500		563	

Plomb I. — Tableau de quantités mesurées (v, v', d diamètre d'empreinte permanente) et de quelques autres qui s'en déduisent. Ce tableau contient aussi les durées τ de contact. Tout est en unités C. G. S. (*fig.* 25-26-27).

v	v'	$10^3 d$	$10^7 \tau$	$10^3 \varepsilon$	$10^6 h$	$10^6 \pi h$	$10^6 . 2 v' \tau$	$10^6 z$	$\frac{10^{22}}{y^2}$
Bille de M = 94,92 *g* et R = 1,430 cm :									
31,32	15,50	161,2	2 412	495	2 273	7 141	7 477	1 916	7 100
62,64	25,58	238,1	2 205	408	4 964	15 595	11 281	1 870	6 767
140,07	48,05	363	1 995	343	11 560	36 317	19 172	1 810	6 444
Mobile de M = 27,145 *g* et R = 1,905 cm :									
28,01	17,92	119	1 423	640	929	2 918	5 100	2 300	22 900
62,64	33,28	183,8	1 216	531	2 218	6 968	8 094	2 069	10 670
140,07	62,16	281,7	1 087	444	5 213	16 377	13 513	1 949	8 120
Mobile de M = 76 *g* et R = 1,905 cm :									
28,01	16,02	159	2 026	572	1 659	5 212	6 491	2 104	14 740
55	27,19	225	1 875	494	3 324	10 443	10 196	1 988	9 402
108,5	45,23	320	1 753	417	6 730	21 143	15 857	1 905	7 285
177,17	63,33	404,2	1 664	357	10 740	33 740	21 076	1 804	5 397

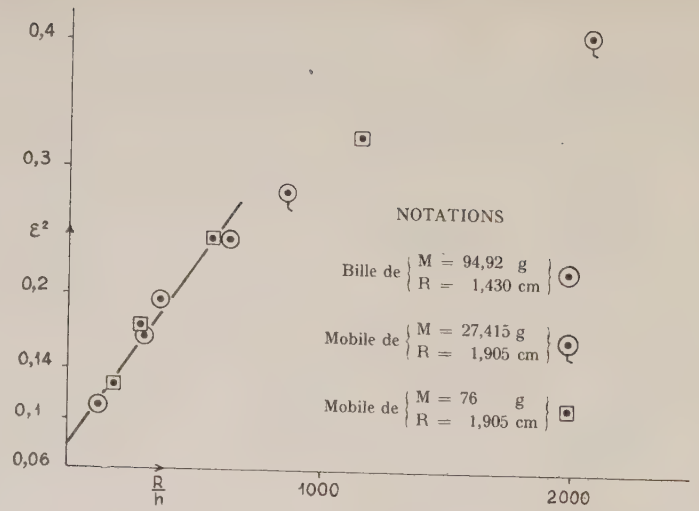


Fig. 25

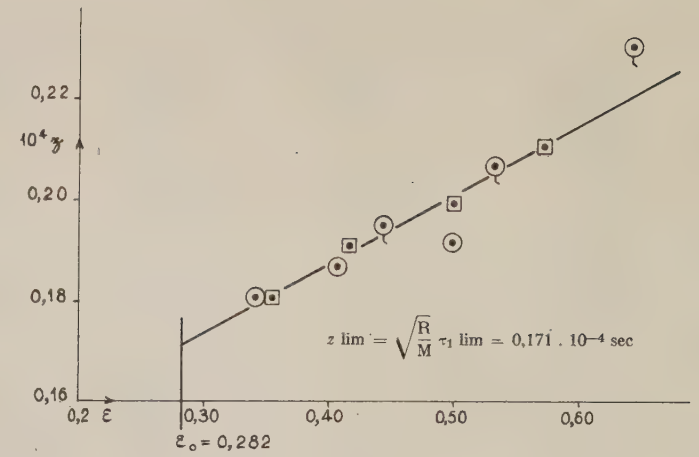


Fig. 27

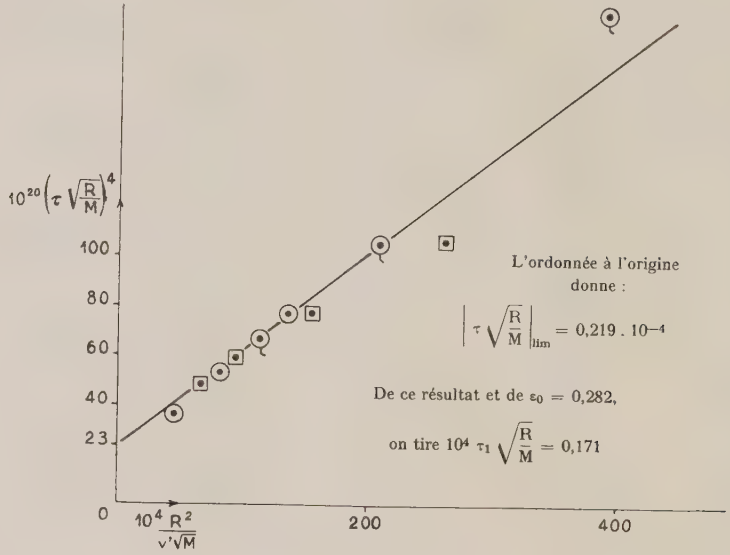


Fig. 26

Cuivre recuit.

Tableau des quantités permettant de connaître, à l'aide d'un graphique les valeurs de τ et ρ relatives à la bille de masse M = 3,55 *g* et rayon R = 0,475 cm (*fig.* 28).

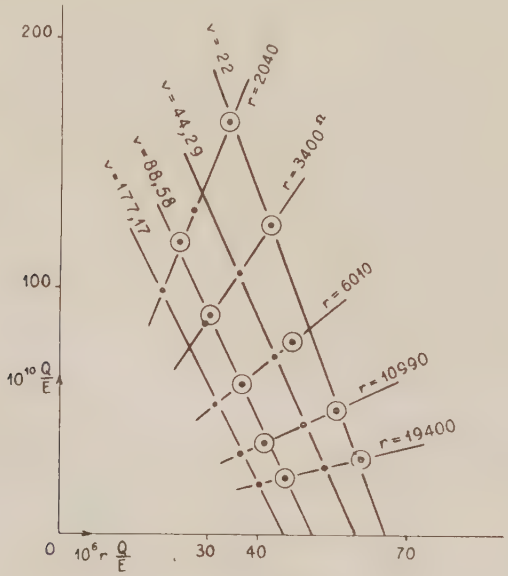


Fig. 28

v	22		44,29		88,58		177,17	
$r\Omega$	$10^{12}\frac{Q}{E}$	$10^8 r\frac{Q}{E}$	$10^{12}\frac{Q}{E}$	$10^8 r\frac{Q}{E}$	$10^{12}\frac{Q}{E}$	$10^8 r\frac{Q}{E}$	$10^{12}\frac{Q}{E}$	$10^8 r\frac{Q}{E}$
2 040	16 640	3 395	13 140	2 679	11 820	2 411	9 900	2 020
3 400	12 560	4 270	10 610	3 609	8 872	3 017	8 554	2 908
6 010	7 800	4 688	7 215	4 336	6 115	3 675	5 251	3 156
10 990	5 044	5 543	4 512	4 959	3 741	4 111	3 332	3 662
19 400	3 112	6 038	2 766	5 366	2 354	4 566	2 066	4 007
$10^4\ \tau$	0,6565		0,5980		0,5102		0,4517	
ρ	1 867		2 244		2 350		2 518	

Cuivre recuit. — Tableau des quantités mesurées (v, v', d, τ) et de quelques autres qui s'en déduisent (*fig.* 29-30-31-32).

v	v'	$10^3\, d$	$10^6\, \tau$	$10^3\, \varepsilon$	$10^5\, h$	$10^6 \tau h$	$10^6 . 2 v' \tau$	$10^8\, z$	$\frac{10^{22}}{y^3}$
Bille de M = 3,55 *g* et R = 0,475 cm :									
22	8,532	46,66	6 565	388	573	1 800	1 120	1 749	5 793
44,29	17,26	65	5 980	390	1 113	3 496	2 064	1 652	5 055
88,58	28,62	90	5 102	323	2 136	6 711	2 920	1 503	3 502
177,17	52,82	120	4 517	298	3 806	11 957	4 772	1 330	2 073
Bille de M = 94,92 *g* et R = 1,430 cm :									
22	8,32	136,6	17 060	378	1 632	5 127	2 839	1 612	4 673
44,29	15,47	189	15 400	349	3 126	9 820	4 765	1 499	3 500
88,58	27,9	256	13 520	315	5 741	18 036	7 544	1 348	2 267
177,17	47,1 ?	352,5	12 250	266 ?	10 903	34 253	11 535	1 253	1 651
Mobile de M = 50,38 *g* et R = 0,445 cm :									
22	6,903	84,7	18 690	314	2 019	6 343	2 580	1 451	3 127
44,28	13,12	115,8	16 410	296	3 783	11 885	4 306	1 325	2 249
88,58	24,98	157,7	15 340	282	7 040	22 116	7 664	1 232	1 633
Mobile de M = 27,72 *g* et R = 3,016 cm :									
22	10,93	123	8 814	497	627	1 970	1 972	1 960	8 918
55	25,40	199	7 702	462	1 642	5 158	3 912	1 860	8 924
140	56,70	299	6 597	405	3 707	11 646	7 481	1 604	4 346

Fig. 29

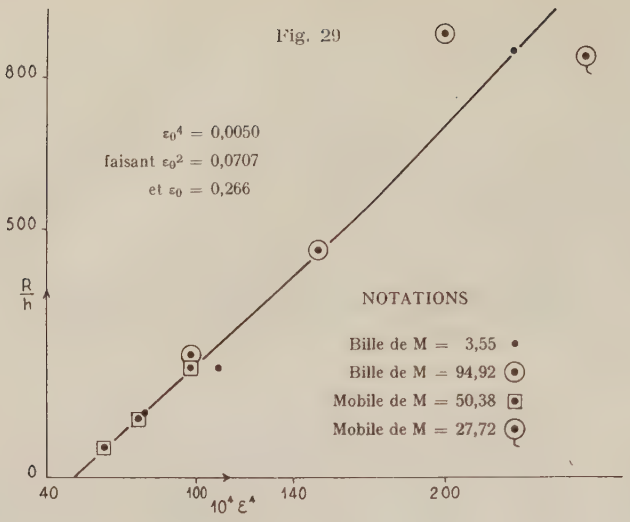


Fig. 30

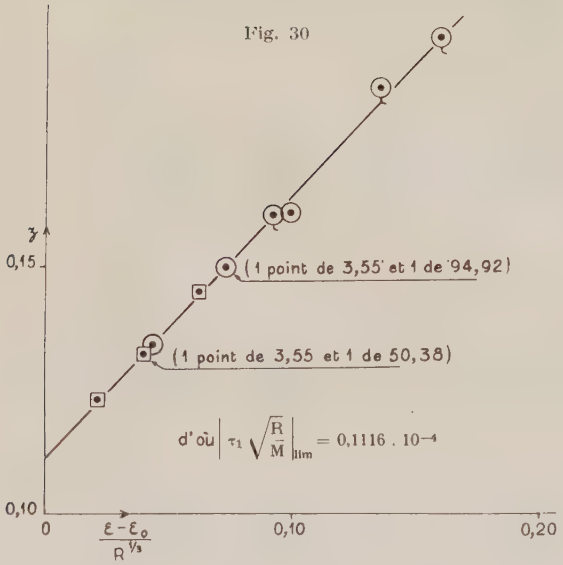


Fig. 32

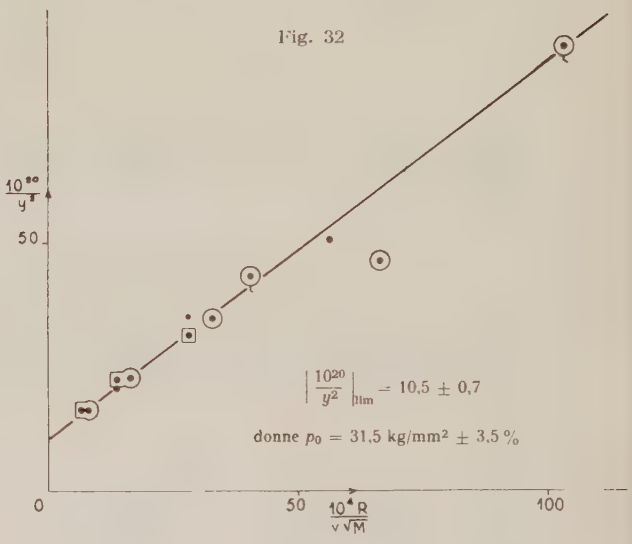
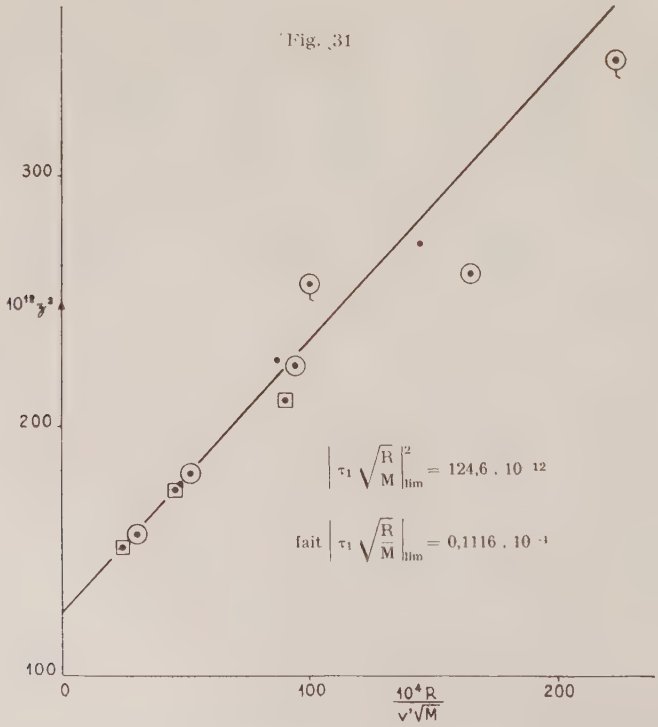


Fig. 31



Plomb II (2e polissage).

Tableau des quantités permettant de connaître avec l'aide d'un graphique les valeurs de τ et ρ relatives à la bille de masse M = 5,59 *g* et rayon R = 0,5555 cm (*fig.* 33).

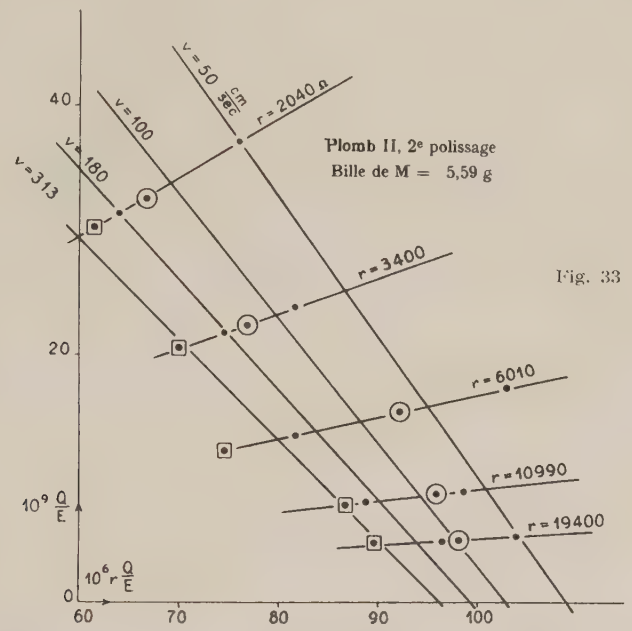


Fig. 33

v cm/sec	50		100		180		313	
r ohms	$10^{11}\frac{Q}{E}$	$10^{8}\,r\frac{Q}{E}$	$10^{11}\frac{Q}{E}$	$10^{8}\,r\frac{Q}{E}$	$10^{11}\frac{Q}{E}$	$10^{8}\,r\frac{Q}{E}$	$10^{11}\frac{Q}{E}$	$10^{8}\,r\frac{Q}{E}$
2 040	3 729	7 607	3 249	6 689	3 145	6 415	3 017	6 154
3 400	2 400	8 160	2 249	7 646	2 199	7 477	2 060	7 003
6 010	1 714	10 303	1 534	9 232	1 361	8 179	1 243	7 469
10 990	897	9 855	874	9 601	808	8 881	791	8 695
19 400	537	10 426	500	9 697	498	9 660	461	8 947
$10^4\,\tau$	1,09		1,029		0,992		0,961	
ρ ohms	883		1 000		1 117		1 225	

Plomb II (2e *polissage*). — Tableau des quantités mesurées (v, v', d, τ) et de quelques autres qui s'en déduisent (*fig.* 34-35-36-37-38).

v	v'	$10^3\,d$	$10^8\,\tau$	$10^3\,\varepsilon$	$10^6\,h$	$10^6\,\pi\,h$	$10^6\,.\,2'\,v\tau$	$10^8\,z$	$10^{-5}\,y$
Bille de M = 5,59 *g* et R = 0,5555 cm :									
50	15,44	104,3	10 900	309	2 440	7 666	3 366	2 657	5 621
100	24,27	141,6	10 290	243	4 510	14 170	4 994	2 431	7 082
180	36,89	188,8	9 920	205	8 020	25 195	7 319	2 363	7 485
313	56,63	245,2	9 610	181	13 700	43 040	10 884	2 300	7 900
Mobile de M = 50,70 *g* et R = 0,445 cm :									
60	12,32	182	30 210	205,3	9 300	29 220	7 444	2 371	7 022
100	18,42	230	29 200	184,2	15 100	47 440	10 757	2 302	7 507
180	29,75	302,8	28 410	165,3	26 600	83 565	16 906	2 244	7 930

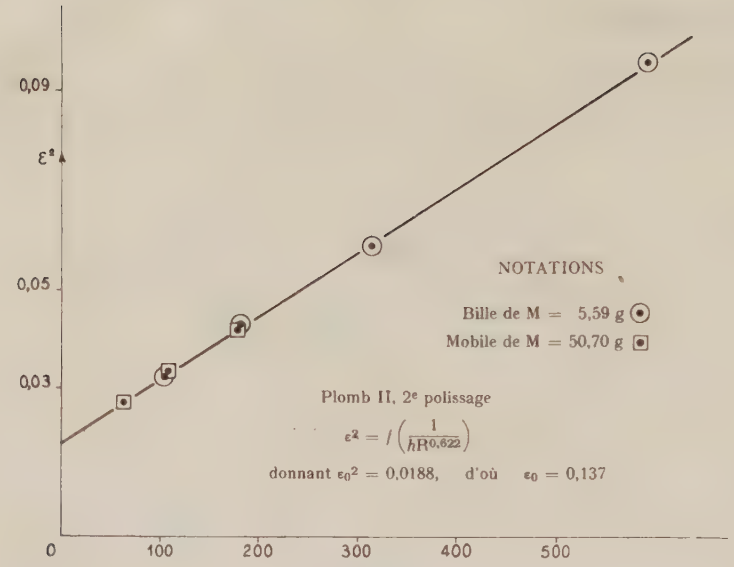


Fig. 34

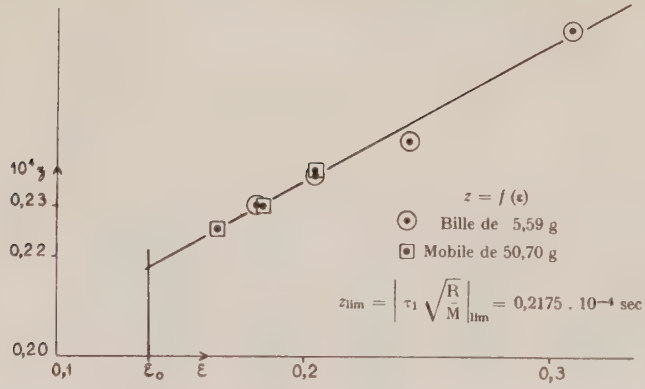


Fig. 35

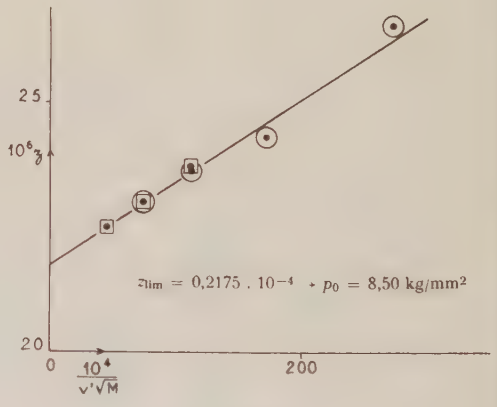


Fig. 36

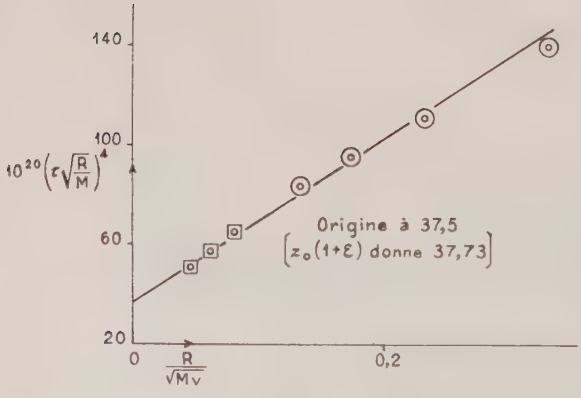


Fig. 37

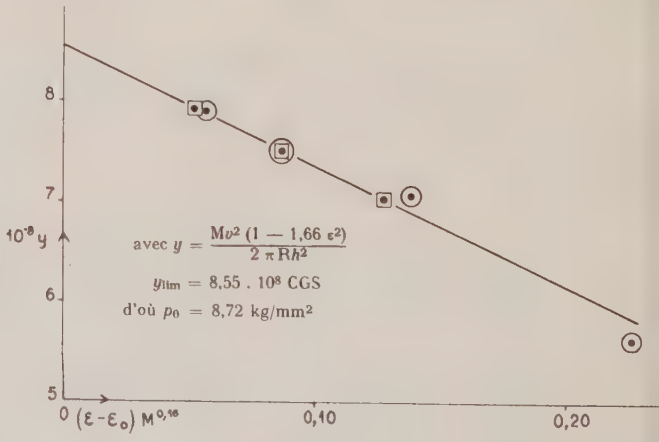


Fig. 38

III. — COMPLÉMENT RELATIF A TOUS MÉTAUX (DES MÉTAUX MOUS AUX TRÈS DURS) ET FAISANT SUITE A LA PAGE 31

Les graphiques de coordonnées $\frac{Q}{E}$ et $r\frac{Q}{E}$ vus sous les titres I et II de l'annexe permettent de corriger les tableaux correspondants par l'adoption de nombres $\frac{Q}{E}$ pris sur les droites. Nous avons ainsi dressé le tableau de la page suivante où chaque valeur de $\frac{Q}{E}$ est plus étroitement liée au temps observé que ne peut l'être une moyenne provenant des mesures relatives à un nombre de chocs souvent très petit.

Dans ce dernier tableau et dans le graphique (*fig.* 39), nous avons ajouté

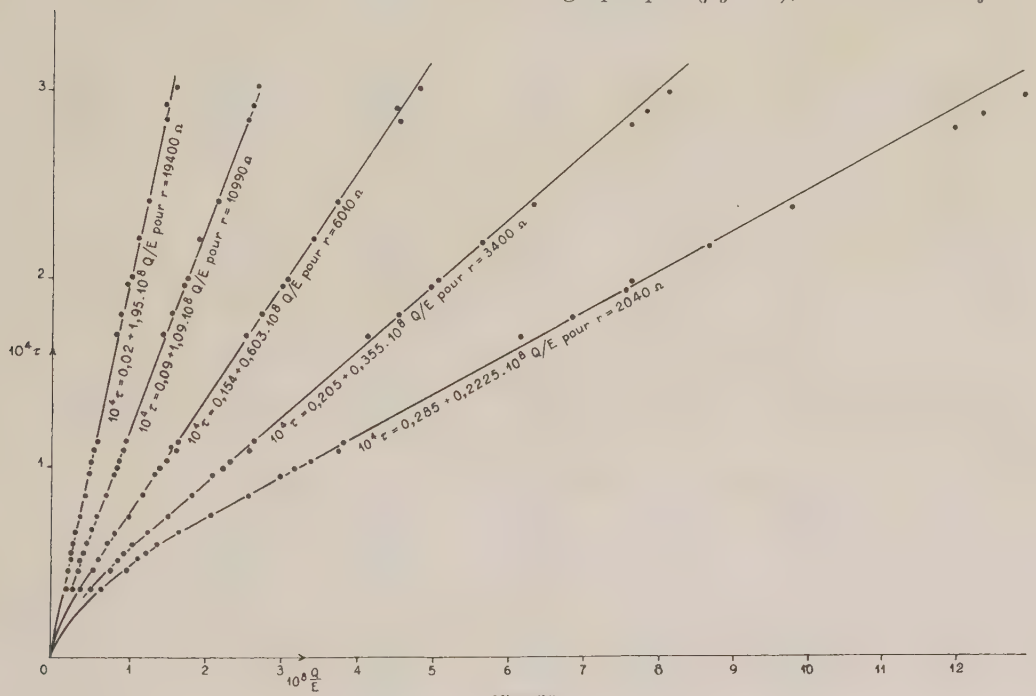


Fig. 39

de la même façon les valeurs de $\frac{Q}{E}$ et τ relatives aux chocs d'une petite bille sur l'acier à billes et celles relatives aux chocs du mobile (M = 50,70 *g*, R = 0,445 cm) sur le plomb II. Nous l'avons fait pour utiliser le plus court et le plus long des temps τ que nous avons réellement observés.

Comme nous l'avons dit à la fin de la troisième partie de cet exposé (p. 31), tout tracé liant les valeurs de $\frac{Q}{E}$ et de τ comporte une très importante partie rectiligne. Cette partie convient à une gamme de valeurs de τ d'autant plus étendue que la résistance r du circuit de mesure est plus grande. Pour $r = 2.040$ ohms la droite convient de $\tau = 0{,}6.10^{-4}$ à $2{,}3.10^{-4}$ s, mais les droites relatives à $r \geqq 6.010$ ohms conviennent à tous les temps τ observés.

v	$10^8 \frac{Q}{E}$					$10^4 \tau$
	$r = 2040$	3 400	6 010	10 990	19 400	
	Étain. — Mobile de M = 50,79 *g* et R = 0,445 cm :					
50	7,533	4,95	2,99	1,70	0,97	1,958
100	6,82	4,52	2,71	1,55	0,90	1,808
180	6,154	4,12	2,50	1,45	0,843	1,705
	Plomb I. — Bille de M = 94,92 *g* et R = 1,430 cm :					
31,32	9,76	6,314	3,70	2,12	1,217	2,412
62,64	8,66	5,62	3,386	1,91	1,11	2,205
140	7,64	5,02	3,023	1,74	1,00	1,995
	Cuivre recuit. — Bille de M = 3,55 *g* et R = 0,475 cm :					
22	1,664	1,256	0,83	0,5044	0,30	0,6565
44,29	1,384	1,061	0,721	0,451	0,2766	0,5980
88,58	1,16	0,887	0,611	0,374	0,2354	0,5102
177,17	0,99	0,76	0,525	0,333	0,2066	0,4517
	Plomb II. — Bille de M = 5,59 *g* et R = 0,5555 cm :					
50	3,73	2,536	1,60	0,92	0,538	1,09
100	3,37	2,30	1,47	0,84	0,500	1,029
180	3,145	2,20	1,40	0,82	0,48	0,992
313	2,95	2,03	1,32	0,79	0,463	0,961
	Plomb II. — Mobile de M = 50,70 *g* et R = 0,445 cm :					
60	12,9	8,10	4,77	2,65	1,54	3,02
100	12,3	7,8	4,47	2,58	1,48	2,92
180	11,96	7,6	4,5	2,507	1,44	2,84
	Acier à billes. — Mobile de M = 76 *g* et R = 1,905 cm :					
22,5	3,766	2,612	1,636	0,941	0,561	1,137
45	3,09	2,17	1,38	0,812	0,479	0,987
90	2,54	1,82	1,17	0,689	0,413	0,852
180	2,05	1,51	0,983	0,589	0,354	0,739
	Acier à billes. — Bille de M = 5,59 *g* et R = 0,555 cm :					
22,5	1,228	0,940	0,648	0,406	0,248	0,540
180	0,627	0,500	0,368	0,241	0,155	0,355

Les coefficients de la formule empirique $10^4 \tau = a + 10^8 b \frac{Q}{E}$ traduisant les droites convenant à notre réalisation du procédé n° 3 satisfont aux relations simples suivantes :

$$b = 0{,}02 + 0{,}98 \,.\, 10^{-4} r \qquad \text{et} \qquad a^2 = 183{,}7 \left(\frac{1}{r} - 0{,}48 \,.\, 10^{-4} \right),$$

cette dernière étant valable pour r inférieur à l'inverse de $0{,}48.10^{-4}$, c'est-à-dire 20.833 ohms. Pour r supérieur à 20.800 Ω environ on doit prendre $a = 0$.

Ajoutons que les nombres $\frac{Q}{E}$ et τ obtenus dans des essais sur un acier doux (métal mi-dur dont nous n'avons pas jugé utile de parler jusqu'ici parce que notre exposé

est surtout consacré aux métaux mous) se placent correctement sur nos graphiques correspondant aux diverses valeurs de r. Nous avons là une preuve de plus que ces graphiques nous permettraient d'obtenir la durée d'un choc isolé pratiqué sur un métal quelconque par une seule observation : celle de $\frac{Q}{E}$ faite avec une seule valeur de r.

IV. — CONTRIBUTION A UNE THÉORIE DES CHOCS DE VIOLENCE MOYENNE SUR PLAQUES ÉPAISSES DE MÉTAUX MOUS

Nous n'avons fait de théorie pour les métaux mous que dans le cas des chocs très violents considérés comme limite des chocs que nous avons réellement pratiqués. Il serait souhaitable, mais cela paraît difficile (voir bas page 39), d'établir une théorie pour ces chocs « réels ».

Examinant la question, nous avons jugé utile de comparer la loi limite que nous avons trouvée pour le mouvement pendant le temps τ_1 (phase de pénétration), loi qui traduit un mouvement sinusoïdal de durée égale à un quart de période, à la loi correspondant à une formule de H. Hertz valable pour un choc assez faible pour être purement élastique.

La théorie de Hertz pour le choc élastique conduit, voir par exemple Bouasse [9], en désignant par α le déplacement du centre de la sphère à laquelle appartient l'extrémité du mobile très dur, à l'instant t pris pendant le choc, α_m le déplacement maximum, v la vitesse au début du contact, τ_1 la durée de la première phase du contact, à la formule :

$$\alpha' \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\alpha}{dt} = v\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_m}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

équivalente à :

$$\alpha = \alpha_m\left[1 - \left(\frac{\alpha'}{v}\right)^2\right]^{0,4}.$$

Opérons le changement de variable $\frac{\alpha}{\alpha_m} = y$ et $\frac{t}{\tau_1} = x$. Il donne :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_m \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha_m}{\tau_1}\frac{dy}{dx},$$

d'où :

$$\frac{v\,\tau_1}{\alpha_m}\int_0^1 dx = \int_0^1 \left(1 - y^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Hertz indique pour le second membre de cette égalité la valeur 1,4716, c'est-à-dire que $v\,\tau_1 = 1{,}4716\,\alpha_m$. Il ne donne pas l'intégrale de 0 à y quelconque, mais ce résultat permet d'écrire :

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} = 1{,}4716\left(1 - y^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, si le mouvement était sinusoïdal, nous aurions :

$$\text{(2)} \qquad \alpha = \alpha_m \sin\frac{\pi}{2\,\tau_1}t \qquad \text{donc :} \qquad \frac{dy}{dx} = 1{,}5708\,(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Des applications numériques, faites avec diverses valeurs de y, nous ont montré que les valeurs (1) et (2) de y' sont toujours voisines. Par tâtonnement, nous les avons trouvées égales pour $y = 0{,}642$ (valeur commune 1,2043).

Pour mieux assurer la comparaison des formules (1) et (2), nous avons calculé un certain nombre de points de la courbe satisfaisant à (1). Par souci de contrôler nos résultats, nous avons conduit le calcul de façon à retrouver le coefficient 1,4716 que nous désignerons provisoirement par k.

Voici deux manières différentes, qui ont des avantages complémentaires, de résoudre l'équation $y' = k\left(1 - y^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Première manière.

Écrivons $\left(1 - y^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} dy = k\,dx$.

Après développement en série du facteur de dy et intégration, nous obtenons :

$$x = \frac{y}{k}\left(1 + \frac{1}{7}\,y^{2,5} + \frac{1}{16}\,y^{5} + \frac{1}{27{,}2}\,y^{7,5} + \frac{24{,}856}{1.000}\,y^{10} + \frac{18{,}228}{1.000}\,y^{12,5} + \ldots\ldots\right).$$

L'application avec $y = 1$ donne une série de plus en plus lentement convergente et nous avons dû l'abandonner.

Avec $y = 0{,}642$, nombre dont l'intérêt a été signalé plus haut, nous n'avons obtenu une bonne précision qu'en poursuivant le calcul jusqu'au terme en $y^{27,5}$:

$$y = 0{,}642 \qquad \text{donne :} \qquad x = \frac{0{,}67778}{k}.$$

Deuxième manière.

L'équation $\alpha = \alpha_m \left(1 - \frac{\alpha'^2}{v^2}\right)^{0,4}$ est une équation de Lagrange de la forme $\alpha = f(\alpha')$.

La tangente à la courbe s'écrit $\alpha = pt + q$ avec q fonction du paramètre p.

On sait que le point de contact de la tangente avec la courbe est défini par :

$$\alpha = pt + q,$$
$$\alpha' = t + q'_p.$$

Comme $\alpha'_p = 0$, on a $t = -q'_p$, d'où $\alpha = q - pq'_p$.

Remarquant que $p = \alpha'_t$, on obtient :

$$q'_p - \frac{q}{p} = -\frac{\alpha_m}{p}\left(1 - \frac{p^2}{v^2}\right)^{0,4}.$$

La solution de cette équation sans second membre est $q = Cp$.

Il apparaît difficile de trouver une solution particulière de l'équation complète, mais la méthode de variation des constantes conduit à :

$$q = Cp = \alpha_m \left(1 + 0{,}4\,\frac{p^2}{v^2} + 0{,}04\,\frac{p^4}{v^4} + \ldots\ldots\right) + Kp.$$

On obtient t par $-q'_p$ et α par $q - pq'_p$.

D'ailleurs $t = \tau_1$ fait $p = 0$ et il s'ensuit que $K = -\tau_1$.

Finalement avec $v\,\tau_1 = k\,\alpha_m$, on a $\frac{\alpha}{\alpha_m}$ et $\frac{t}{\tau_1}$ en fonction du paramètre p.

$\frac{\alpha}{\alpha_m}$, soit $y = \left(1 - \frac{p^2}{v^2}\right)^{0{,}4}$ résultat connu au départ du calcul :

$\frac{t}{\tau_1}$, soit : $x = 1 - \frac{1}{k}\left[0{,}8\,\frac{p}{v} + 0{,}16\left(\frac{p}{v}\right)^3 + 0{,}0768\left(\frac{p}{v}\right)^5 + 0{,}04754\left(\frac{p}{v}\right)^7 + \ldots\ldots\right]$.

Ici encore la valeur de x est donnée par une série.

A l'inverse de celle obtenue par la première manière c'est pour $y = 0$ (c'est-à-dire $\frac{p}{v} = 1$) que cette série est beaucoup trop lentement convergente.

L'application avec $y = 0{,}642$, soit $\frac{p}{v} = 0{,}81837$, nous a obligé, pour une bonne précision, à calculer jusqu'au terme en $\left(\frac{p}{v}\right)^{25}$; nous avons trouvé :

$$x = 1 - \frac{0{,}7938}{k}.$$

Contrôle numérique de nos coefficients.

L'égalité des deux expressions de x trouvées pour une même valeur de y donne bien $k = 1{,}4716$.

Tableau de résultats.

Les valeurs de x ont été obtenues par le premier développement pour les y assez petits, par le second pour les y assez voisins de 1 :

$y = 0$	0,2	0,4	0,642	0,8	0,9	1
$x = 0$	0,13624	0,2759	0,4606	0,6055	0,7247	1

Pour les mêmes valeurs de y la fonction $y = \sin\frac{\pi}{2}x$ donne :

$x = 0$	0,12819	0,2620	0,4438	0,59034	0,7128	1

Conclusion.

Pendant un choc assez faible pour être pratiquement élastique, d'un mobile à bout sphérique contre une plaque épaisse (métaux quelconques : différents ou non), le mouvement du centre de la sphère est constamment peu éloigné de ce que serait une demi-période de mouvement sinusoïdal (1).

Il suffit, d'ailleurs, pour passer du cas de deux métaux identiques (voir p. 52) à celui de métaux différents de poser $e_1 = \frac{E_1}{1 - \sigma_1^2}$, de même pour le deuxième métal, puis de poser $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = \frac{2}{e}$.

Le mouvement d'un mobile très dur pendant la durée τ_1 de la première phase de son contact par choc contre une plaque de métal mou a donc pour v très petit une forme très voisine de celle que nous avons trouvée pour v très grand.

Il y a cependant une différence essentielle entre les deux cas : dans le premier l'élasticité intervient seule et on trouve τ_1 proportionnel à $\left(\frac{M^2}{Rv}\right)^{\frac{1}{5}}$, alors que dans le second on trouve τ_1 proportionnel à $\left(\frac{M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(1) Remarquons que l'hypothèse de Hertz, d'après laquelle la forme de la surface de contact pendant le choc élastique est indépendante de la force qui est en jeu à l'instant t, correspond à une quasi-certitude dans le cas du choc élastique d'un mobile très dur sur une plaque épaisse de métal mou.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. B. Andrews. — *Impact of spheres of soft metals*, Phil. Mag., 1929, t. 8, p. 781 et 1930, t. 9, p. 593.

[2] Auerbach. — *Absolute Hartmessung*, W. A. 1891, XLIII, p. 88.

[3] Brillouin. — *Ann. Phys.*, ch. VII, série 13, 1898, p. 245.

[4] Brun Edmond. — *Chaleurs spécifiques*, collection A. Colin, p. 68.

[5] Edwards et Austin. — *Iron, Steel Inst.*, mai 1923.

[6] Foch. — *Acoustique*, p. 28, collection Colin.

[7] Granier. — *Les pertes dans les diélectriques*, Thèse, Paris 1923, et *Recherches sur les propriétés diélectriques du caoutchouc* (Publications du Ministère de l'Air, 1935).

[8] Greenwood et Korner. — *J. Inst. Metals*, 1939, 64, p. 115.

[9] Hertz. — 1882, *Crelles Journ.*, 92, p. 156, ges. Werke, 1, p. 155, 174.
Les propositions servant de base à sa théorie du choc élastique ont été rappelées par de nombreux auteurs. Citons Chwolson, *Traité de Physique*, t. 1, p. 869 et Bouasse, *Résistance des matériaux*, p. 350.

[10] B. Hopkinson. — *The effects of momentary stresses in metals* (Proc. R. soc., march 1905, vol. 74, p. 498).

[11] Kotaro Honda et Kinnosté Takahasi. — *Iron and Steel Inst.*, mai 1934.

[12] Krupkowski. — *Propriétés mécaniques du cuivre* (Revue de métallurgie, déc. 1931, p. 660).

[13] Le Rolland Paul. — Note aux C. R. du 23 février 1920 et Thèse Paris, 1922. — *Applications nouvelles du pendule aux problèmes industriels et en particulier au contrôle des métaux* (Bull. de la Soc. d'encouragement pour l'industrie nationale, mai 1934, p. 317).

[14] R. L'Hermite. — Inst. techn. bâtiment et travaux publics, circulaire, série G, n° 4, du 10 déc. 1942 : *La déformation du plomb.*

[15] G. Moreau. — *Ann. de Phys.*, 1920, 9e série, t. 14, p. 307.

[16] J. Okubo Toloku. — *Univ. Sci. Rep.*, 1922, p. 154. A trouvé comme C. V. Raman que $\frac{v'}{v}$ tend vers l'unité quand v tend vers zéro.

[17] C. V. Raman. — *Phys. Rev.*, 1918, XII, p. 442.

[18] Schneider. — *Z. des Verdeutscher Ing.*, 1910, et *Mitt. ü Forshungsarbeiten auf dem gebeite des Ingenieur-wesen.* Springer, Berlin, 1910.

[19] Smith and Sandland. — *J. Iron and Steel Inst.*, mai 1925.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

CINÉTIQUE CHIMIQUE

Vu et approuvé :
Rennes, le 19 décembre 1946.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Y. MILON

Vu et permis d'imprimer :
Rennes, le 26 décembre 1946.
Le Recteur de l'Université de Rennes,
M. COLLEVILLE

IMPRIMERIE

Service de Documentation et d'Information Technique 3680 - 10-48

IMPRIMERIE